出題のねらい

教科書にある基本的な内容が、確実に理解できているかどうかを問うています。問題は全問客観式です。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、誘導のある設問では、読解力や思考力も求めています。

$\boxed{1}$ 「数学Ⅰ・A」の各分野の基本的な内容を問いました。「数と式」、「2次関数」、「図形と計量」、「場合の数と確率」、「整数の性質」の各分野から出題しました。

$\boxed{2}$ 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。「式と証明」、「複素数と方程式」、「図形と方程式」、「三角関数」、「指数関数と対数関数」の各分野から出題しました。

$\boxed{3}$ 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」の分野から出題しました。3次関数の極大・極小と、2つの3次曲線と2本の直線で囲まれた部分の面積の和について問いました。

$\boxed{4}$ 「数学B」の「数列」の分野から出題しました。数列の和と一般項の関係について、基本的な内容が理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{1}$

【解　答】（40点）

(1)	$\boxed{1}\boxed{2}$	18	（3点）
	$\boxed{3}\boxed{4}$	-4	（3点）
(2)	$\boxed{5}\boxed{6}$	-4	（3点）
	$\boxed{7}\boxed{8}$	10	（3点）
(3)	$\dfrac{\boxed{9}\boxed{10}}{\boxed{11}}$	$\dfrac{-1}{2}$	（3点）
	$\boxed{12}\boxed{13}\sqrt{\boxed{14}}$	$14\sqrt{3}$	（3点）
(4)	$\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}\boxed{17}}$	$\dfrac{1}{81}$	（3点）
	$\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}\boxed{20}}$	$\dfrac{8}{27}$	（4点）
(5)	$\boxed{21}\boxed{22}$	12	（2点）
	$\boxed{23}\boxed{24}$	36	（3点）
	$\boxed{25}\sqrt{\boxed{26}\boxed{27}}$	$3\sqrt{14}$	（3点）
(6)	$\boxed{28}$	4	（2点）
	$\boxed{29}$	2	
	$\boxed{30}$	5	（3点）
	$\boxed{31}$	7	（2点）

【解　説】

(1)　$x+\dfrac{1}{x}=2\sqrt{5}$ ……①の両辺を平方して

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=20$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=20 \text{ よって } x^2+\frac{1}{x^2}=18$$

ここで

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}=18-2=16$$

①より $0<x$ なので，$0<x<1$ のとき，

$x<\dfrac{1}{x}$ で $x-\dfrac{1}{x}<0$ であるから

$$x-\frac{1}{x}=-4$$

（別解）

①より　$x^2-2\sqrt{5}x+1=0$

$x<1$ であるから

$$x=\sqrt{5}-2$$

よって

$$x-\frac{1}{x}=\left(\sqrt{5}-2\right)-\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$
$$=\left(\sqrt{5}-2\right)-\left(\sqrt{5}+2\right)$$
$$=-4$$

(2)　$y=x^2-4mx+8m+6$
$$=(x-2m)^2-4m^2+8m+6$$

よって，放物線の頂点の y 座標 Y は

$$Y=-4m^2+8m+6$$

このとき

$$Y=-4(m^2-2m)+6$$
$$=-4\left\{(m-1)^2-1\right\}+6$$
$$=-4(m-1)^2+10$$

よって，m の値が変化すれば

Y の最大値は 10

(3)　三角形においては最大辺に向かい合う角が最大であるから，余弦定理より

$$13^2 = 7^2 + 8^2 - 2\times7\times8\cos A$$

よって

$$\cos A = \frac{7^2+8^2-13^2}{2\times7\times8} = -\frac{1}{2}$$

すなわち，A=120°であるからこの三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\times7\times8\times\sin120° = 28\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

(4)　1 回のゲームで 3 の倍数の目が出て 3 点を獲得する確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

それ以外の目が出て 1 点を獲得する確率は

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

このゲームを 4 回行って，12 点を獲得するのは 3 の倍数の目が 4 回出る場合だから確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

8 点を獲得するのは 3 の倍数の目が 2 回, それ以外の目が 2 回出る場合だから確率は

$${}_4C_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

(5)　問題文に適する図は, 問題にかいてある図 …(a) および,(a) の A と B，E と F をそれぞれ入れ替えた図 …(b) である。(a) のとき，△CEA と△CFB において

条件より，AC=BC　……①

∠CEA=∠CFB=90°　……②

さらに，四角形 CEDF で

②と，直径 AB の円周角より∠EDF=90° であることから

∠ECF=90°

よって，∠ECA=∠FCB　……③

(= 90° − ∠ACF)

したがって，①，②，③より

△CEA≡△CFB　……④

よって，EA=FB であるから

$$\begin{aligned}ED+DF &= EA+AD+DF\\ &= AD+DF+FB\\ &= AD+DB\\ &= 12\end{aligned}$$

また④より，四角形 CADB の面積は正方形 CEDF の面積に等しく，正方形 CEDF の 1 辺の長さは

$ED = DF = 6$

であるから，求める四角形 CADB の面積は $6^2 = 36$

次に，直角三角形 CEA において

CE=6

また，AB=10 より $AC = 5\sqrt{2}$

よって，$AE = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 6^2} = \sqrt{14}$

したがって，三角形 CEA の面積は

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times6 = 3\sqrt{14}$$

(b) のときも同様の結果になる。

(6)　a を因数分解すれば

$$\begin{aligned}a &= n^2-2n-8\\ &= (n-4)(n+2)\end{aligned}$$

a を素数とすれば，n が自然数で

$n+2 \geqq 3$ であるから

$n-4=1$

このとき，$n=5$ であり

$a=(5-4)(5+2)=7$

すなわち，確かに a は素数となる。

$\boxed{2}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{32}\boxed{33}$	28	（2 点）
	$\boxed{34}\boxed{35}$	10	（2 点）
(2)	$\boxed{36}\boxed{37}$	13	（2 点）
	$\boxed{38}\boxed{39}\,i$	$-2i$	（2 点）
(3)	$\sqrt{\boxed{40}}$	$\sqrt{5}$	（2 点）
	$\boxed{41}$	6	（2 点）
	$\boxed{42}$	4	
(4)	$\boxed{43}$	2	（1 点）
	$\boxed{44}$	①	（1 点）
	$\boxed{45}$, $\boxed{46}$	②，⑨（順不同）	（2 点）
(5)	$\boxed{47}$	3	（2 点）
	$\boxed{48}$	④	（1 点）
	$\boxed{49}$	⓪	（1 点）

【解　説】

(1)

$$\begin{array}{r|l} & x-5 \\ \hline x^2-6x-2 & x^3-11x^2+ax+b \\ & x^3-\ \ 6x^2-2x \\ \hline & -\ 5x^2+(a+2)x+b \\ & -\ 5x^2+\ \ 30\ x+10 \\ \hline & (a-28)x+b-10 \end{array}$$

上の割り算より

x^3-11x^2+ax+b が x^2-6x-2 で割りきれるならば

$$\begin{cases} a-28=0 \\ b-10=0 \end{cases}$$

よって

$a=28$，$b=10$

(2)　$x^4+kx^2+36=0$ の解の 1 つが $x=2i$ であるから，代入して

$$(2i)^4+k(2i)^2+36=0$$
$$16i^4+4ki^2+36=0$$

$i^2=-1$ であるから

$$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$$

したがって

$$16-4k+36=0$$
$$k=13$$

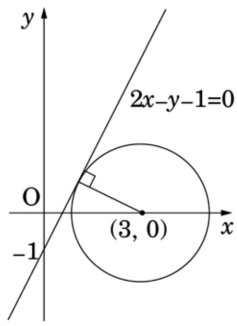
このとき，$x^4+13x^2+36=0$

$$(x^2+4)(x^2+9)=0$$

よって，この方程式の 4 つの解は $x=\pm 2i$，$\pm 3i$ であるから，$x=2i$ 以外の 3 つの解の和は

$$(-2i)+3i+(-3i)=-2i$$

(3)　求める円の半径は，点(3，0)と直線 $2x-y-1=0$ との距離であるから，



$$\frac{|2\times 3-0-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

よって，この円の方程式は

$$(x-3)^2+y^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$x^2+y^2-6x+4=0$$

(4)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ の左辺を変形すると，

$$\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\sin(x+\theta)=2\sin(x+\theta)$$

よって　$a=2$

さらに，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0<\theta<2\pi$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

すなわち，方程式は

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$0\leqq x<2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ であるから

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

よって　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{11}{6}\pi$

以上より

$\boxed{44}$ に適するのは　①

$\boxed{45}$，$\boxed{46}$ に適するのは　②，⑨

（②と⑨は順不同）

(5)　⓪　$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(2^{-1}\right)^{-3}=2^3=8$

①　$\left(\sqrt{2}\right)^5=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^5=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$

②　$4^0=\left(2^2\right)^0=2^0=1$

③　$\sqrt[5]{32}=\left(2^5\right)^{\frac{1}{5}}=2^1=2$

④　$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}$

したがって，⓪～④のうち整数は ⓪，②，③ の 3 個である。

また，$2^{-\frac{1}{3}}<2^0<2^1<2^{\frac{5}{2}}<2^3$ より

最小の数は　④

最大の数は　⓪

すなわち

$\boxed{48}$ に適するのは④

$\boxed{49}$ に適するのは⓪

$\boxed{3}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{50}$	3	（2 点）
	$\boxed{51}\boxed{52}$	12	
	$\boxed{53}$	0	（2 点）
	$\boxed{54}$	4	（2 点）
(2)	$\boxed{55}$	4	（2 点）
	$\boxed{56}$	2	（2 点）
(3)	$\boxed{57}$	2	（4 点）
	$\boxed{58}\boxed{59}$	−6	
	$\boxed{60}$	2	
	$\boxed{61}$	6	
	$\boxed{62}\boxed{63}$	24	（3 点）
	$\boxed{64}\boxed{65}$	12	（3 点）

【解　説】

(1)　$f(x)=x^3-6x^2+16$ より

$f'(x)=3x^2-12x$

$=3x(x-4)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=4$，0

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになり，

x		0		4	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(x)$ は $x=0$ で極大であり，$x=4$ で極小　である。

(2)　$g(x)=x^3-6x^2+6x+4$ より

$g'(x)=3x^2-12x+6$

$g'(x)=0$ のとき　$x^2-4x+2=0$　……①

したがって，方程式①の解を α，β　$(\alpha<\beta)$ とすれば，次の増減表より

x	…	α	…	β	…
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$g'(x)$ は $x=\alpha$ で極大で，$x=\beta$ で極小であり，

$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=2$

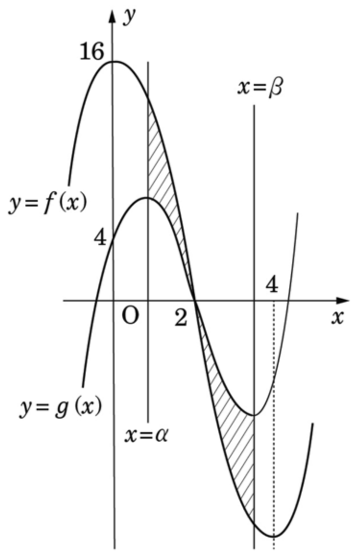
(3)　$f(x)-g(x)=-6x+12$

$\qquad\qquad =-6(x-2)$

すなわち，$x<2$ のとき　$f(x)>g(x)$

$2\leqq x$ のとき　$f(x)\leqq g(x)$

さらに，$f(2)=g(2)=0$ であるから，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは下図のようになり，面積を求める部分は斜線の部分である。



よって，

$$S=\int_{\alpha}^{2}\left\{f(x)-g(x)\right\}dx+\int_{2}^{\beta}\left\{g(x)-f(x)\right\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{2}\left\{-6(x-2)\right\}dx+\int_{2}^{\beta}\left\{6(x-2)\right\}dx$$

$$=\Big[-3x^2+12x\Big]_{\alpha}^{2}+\Big[3x^2-12x\Big]_{2}^{\beta}$$

$$=(-12+24+3\alpha^2-12\alpha)+(3\beta^2-12\beta-12+24)$$

$$=3(\alpha^2+\beta^2)-12(\alpha+\beta)+24$$

ここで，(2)より $\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=2$ であるから

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=4^2-2\times2=12$$

したがって

$$S=3\times12-12\times4+24=12$$

$\boxed{4}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{66}$	2	（2 点）
	$\boxed{67}$	1	（2 点）
(2)	$\boxed{68}$	4	（2 点）
	$\boxed{69}\boxed{70}$	20	（2 点）
	$\boxed{71}$	5	（2 点）
	$\boxed{72}\boxed{73}$	30	（2 点）
	$\boxed{74}$	9	（1 点）
	$\boxed{75}\boxed{76}$	10	（1 点）
	$\boxed{77}$	5	（2 点）
	$\boxed{78}$	1	
	$\boxed{79}\boxed{80}$	50	（2 点）
	$\boxed{81}\boxed{82}$	25	（2 点）
	$\boxed{83}$	1	
	$\boxed{84}$	2	
	$\boxed{85}$	1	

【解　説】

(1)　$S_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ であるから，$a_1=S_1$ より

$$a_1=\frac{1\times2\times3}{3}=2$$

また，$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$ より

$$a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)}{3}\left\{(n+2)-(n-1)\right\}$$

$$=n(n+1)$$

$a_n=n(n+1)$ において

$n=1$ のとき　$a_1=1\times2=2$

よって，数列 $\left\{a_n\right\}$ の一般項は

$$a_n=n(n+1)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2)　$a_n = n(n+1)$が 5 の倍数のとき

$n = 5m - 1$ または　$n = 5m$　(m=1，2，3，…)とおける。よって，m=1 のとき　n=4，5 より

$$b_1 = a_4 = 4 \times 5 = 20$$
$$b_2 = a_5 = 5 \times 6 = 30$$

同様に，m=2 のとき　n=9，10 より

$$b_3 = a_9,\quad b_4 = a_{10}$$

さらに，$m=k$ のとき

$$n = 5k - 1 \text{ または } n = 5k$$

すなわち

$$\begin{array}{lcccccccc} \{a_n\} & \overbrace{a_4, & a_5}^{m=1}, & \overbrace{a_9, & a_{10}}^{m=2}, & \cdots, & \overbrace{a_{5k-1}, & a_{5k}}^{m=k}, & \cdots \\ & \| & \| & \| & \| & & \| & \| & \\ \{b_n\} & b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & \cdots, & b_{2k-1}, & b_{2k}, & \cdots \end{array}$$

よって

$$b_{2k-1} = a_{5k-1},\quad b_{2k} = a_{5k}$$

(1)の結果を用いて

$$b_{2k-1} + b_{2k} = a_{5k-1} + a_{5k}$$
$$= (5k-1)\{(5k-1)+1\} + 5k(5k+1)$$
$$= 50k^2$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} b_k &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{2n-1} + b_{2n} \\ &= (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \cdots + (b_{2n-1} + b_{2n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (b_{2k-1} + b_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 50k^2 \\ &= 50 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{25}{3} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$