出題のねらい

教科書にある基本的な内容が、確実に理解できているかどうかを問うています。問題は全問客観式です。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、誘導のある設問では、読解力や思考力も求めています。

$\boxed{1}$ 「数学Ⅰ・A」の各分野の基本的な内容を問いました。「数と式」、「2次関数」、「図形と計量」、「図形の性質」、「場合の数と確率」、「整数の性質」の各分野から出題しました。

$\boxed{2}$ 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。「式と証明」、「図形と方程式」、「指数関数と対数関数」、「三角関数」の各分野から出題しました。

$\boxed{3}$ 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」の分野から出題しました。長方形の紙の四隅から同じ大きさの正方形を切り取って作った箱の容積を3次関数で表し、容積と切り取った正方形の1辺の長さの関係について問いました。

$\boxed{4}$ 「数学B」の「ベクトル」の分野から出題しました。内積の計算や内分点の位置ベクトルなど、ベクトルの基本的な内容が理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{1}$

【解　答】（40点）

(1)	$\boxed{1}\boxed{2}$	12	（2点）
	$\boxed{3}\boxed{4}$	40	（2点）
	$\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}$	464	（3点）
(2)	$(\boxed{8}, k^2-\boxed{9})$	$(2, k^2-1)$	（2点）
	$\boxed{10}$	2	（2点）
	$\boxed{11}\boxed{12}$	11	（3点）
(3)	$\sqrt{\boxed{13}}$	$\sqrt{6}$	（2点）
	$\boxed{14}\boxed{15}°$	45°	（3点）
	$\dfrac{\boxed{16}+\boxed{17}\sqrt{\boxed{18}}}{\boxed{19}}$	$\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$	（4点）
(4)	$\boxed{20}$	1	（3点）
	$\dfrac{\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{22}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	（4点）
(5)	$\boxed{23}$	②	（2点）
	$\boxed{24}$	③	（3点）
(6)	$\boxed{25}$	4	（2点）
	$\boxed{26}\boxed{27}$	22	（3点）

【解　説】

(1)　$a+b=4$，$ab=2$ であるから

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\cdot2=12$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\cdot2\cdot4=40$$

$$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)$$

$$=12\cdot40-2^2\cdot4=464$$

(2)　$y=kx^2-4kx+k^2+4k-1=k(x-2)^2+k^2-1$

頂点の座標は $(2, k^2-1)$

$k>0$ から，グラフは下に凸である。y は $0\leqq x\leqq3$ において $x=2$ で最小値3をとる。

頂点の y 座標から　$k^2-1=3$　　$k^2=4$

$k>0$ より　$k=2$

このとき，$x=0$ で y は最大となり，

最大値は　$k^2+4k-1=2^2+4\cdot2-1=11$

(3)　△ABD において，余弦定理より

$$BD^2=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\cos60°$$

$$=8+2\sqrt{3}-2\cdot2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{2}=6$$

$BD>0$ より　$BD=\sqrt{6}$

また，△ABD において，余弦定理より

$$\cos\angle ADB=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

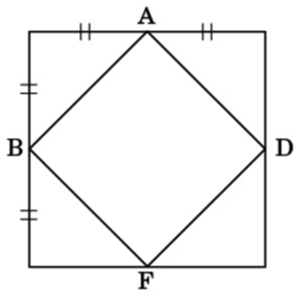
$0°<\angle ADB<75°$　より　$\angle ADB=45°$

したがって　$\angle BDC=75°-45°=30°$

四角形ABCDの面積は，△ABDの面積と△BDCの面積の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sin 30°=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$$

(4)



正方形ABFDを含む平面でこの立方体を切った断面は，1辺の長さが$\sqrt{2}$の正方形となるので，ABの長さは三平方の定理より

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

よって，正方形ABFDの面積は　$1^2=1$

また，EC=$\sqrt{2}$より求める立体（正八面体）の体積は

$$1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

(5)　(ⅰ)「$a=b=0\Rightarrow a+b=0$」は真

「$a+b=0\Rightarrow a=b=0$」は偽（反例：$a=2$，$b=-2$）

よって，$a=b=0$であることは，$a+b=0$であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

すなわち，$\boxed{23}$ に当てはまるのは②である。

(ⅱ)「$a=b\Rightarrow|a+b|=|a-b|$」は偽

（反例：$a=b=1$）

また，$|a+b|=|a-b|$ であるとき，両辺を平方しても同値で

$$(a+b)^2=(a-b)^2$$

$ab=0$　　$a=0$ または　$b=0$　であり

「$|a+b|=|a-b|\Rightarrow a=b$」は偽

（反例：$a=0$，$b=1$）

よって，$a=b$であることは，$|a+b|=|a-b|$であるための必要条件でも十分条件でもない。

すなわち，$\boxed{24}$ に当てはまるのは③である。

(6)　5円，10円，100円のコインの枚数をそれぞれx枚，y枚，z枚とする。題意より

$$\begin{cases}5x+10y+100z=1000 \cdots ① \\ x+y+z=48 \cdots ②\end{cases}$$

①より　$x+2y+20z=200\cdots①'$

②より　$x=48-y-z\quad\cdots②'$

②'を①'に代入して　$y=152-19z\quad\cdots③$

題意より，$x\geqq 1$，$y\geqq 1$，$z\geqq 1$であるから②より

$1\leqq y\leqq 46$

$1\leqq 152-19z\leqq 46$

$5.5\cdots\leqq z\leqq 7.9\cdots$

zは自然数であるから　$z=6$または　$z=7$

$z=6$のとき，③，②'から　$y=38$，$x=4$

$z=7$のとき，③，②'から　$y=19$，$x=22$

したがって，5円玉の枚数は4枚，または22枚である。

2

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{28}$	2	(2 点)
	$\boxed{29}$	9	(2 点)
(2)	$\boxed{30}$	3	(2 点)
	$(x+\boxed{31})^2+y^2=\boxed{32}$	$(x+3)^2+y^2=5$	(2 点)
(3)	$0.\boxed{33}\boxed{34}\boxed{35}$	0.477	(2 点)
	$0.\boxed{36}\boxed{37}\boxed{38}$	0.602	(2 点)
	$\boxed{39}$	8	(2 点)
(4)	$\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}t^2+t-\dfrac{\boxed{42}}{\boxed{43}}$	$\dfrac{1}{2}t^2+t-\dfrac{1}{2}$	(2 点)
	$-\boxed{44}\leqq t\leqq\sqrt{\boxed{45}}$	$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$	(2 点)
	$\dfrac{\boxed{46}}{\boxed{47}}+\sqrt{\boxed{48}}$	$\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$	(2 点)

【解　説】

(1)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$a>0$，$b>0$ から　$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$

相加平均と相乗平均の関係より

$$ab+\frac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=2\cdot 2=4$$

よって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 4+5=9$

等号が成立するのは　$ab=\dfrac{4}{ab}$ のときで

$$(ab)^2=4$$

$ab>0$ より　$ab=2$　のときである。

したがって，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)$　は　$ab=2$　のとき，

最小値 9 をとる。

(2)　2 点 $\mathrm{A}(-2\,,\,2)$，$\mathrm{B}(-5\,,\,-1)$ を通る円の中心は線分 AB の垂直二等分線上にある。

直線 AB の傾きは　$\dfrac{2-(-1)}{-2-(-5)}=1$

線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{-2+(-5)}{2}\,,\,\frac{2+(-1)}{2}\right)=\left(-\frac{7}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$$

よって，求める直線の方程式は

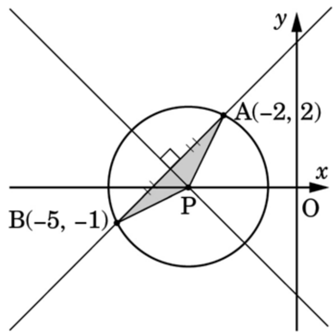
$$y=-\left(x+\frac{7}{2}\right)+\frac{1}{2}=-x-3$$

円の中心 P が x 軸上にあるとき，上の式に $y=0$ を代入して　$x=-3$　よって　$\mathrm{P}(-3\,,\,0)$

AP 間の距離が円の半径となるから求める円の方程式は

$$(x+3)^2+y^2=\left[\sqrt{\{-2-(-3)\}^2+2^2}\right]^2$$

$$(x+3)^2+y^2=5$$



(3)　$\log_5 2=0.431$，$\log_5 3=0.683$　より

$$\log_{10}3=\frac{\log_5 3}{\log_5 10}=\frac{\log_5 3}{\log_5(5\times 2)}=\frac{0.683}{1+0.431}\fallingdotseq 0.477$$

$$\log_{10}4=\frac{\log_5 4}{\log_5 10}=\frac{\log_5 2^2}{\log_5(5\times 2)}=\frac{2\times 0.431}{1+0.431}\fallingdotseq 0.602$$

$\log_{10}2^{25}=7.525$　であるから

$$7<\log_{10}2^{25}<8$$

よって，2^{25} は 8 桁の数である。

(4) $t=\sin x+\cos x$ …①の両辺を 2 乗して

$$t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2$$
$$=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=1+2\sin x\cos x$$

よって　$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}$

したがって

$$y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$$
$$=\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2}\cdots②$$

①より　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$

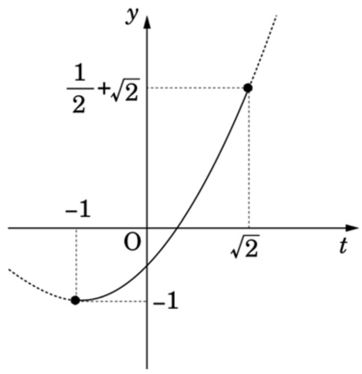
このとき　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$
$$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}\cdots③$$

②より　$y=\dfrac{1}{2}\left(t+1\right)^2-1\cdots②'$

このとき，②′，③より，y は $t=\sqrt{2}$ のとき最大となり，②より最大値は

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$$



3

【解　答】（20 点）

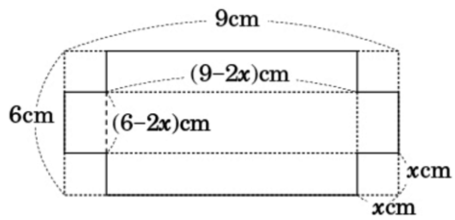
(1)	$0<x<$ $\boxed{49}$	$0<x<3$	(3 点)
	$\left(\boxed{50}-\boxed{51}x\right)\left(\boxed{52}-\boxed{51}x\right)x$	$(6-2x)(9-2x)x$	(3 点)
(2)	$\boxed{53}$	2	(2 点)
	$\dfrac{\boxed{54}}{\boxed{55}}$	$\dfrac{1}{2}$	(2 点)
(3)	$\dfrac{\boxed{56}-\sqrt{\boxed{57}}}{\boxed{58}}$	$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$	(5 点)
	$\boxed{59}\boxed{60}+\boxed{61}\sqrt{\boxed{62}}$	$10+7\sqrt{7}$	(5 点)

【解　説】

(1)　箱の各辺の長さは正であるから，

$$\begin{cases}6-2x>0\\9-2x>0\\x>0\end{cases}\qquad\text{よって}\quad 0<x<3$$

$$V=\left(6-2x\right)\left(9-2x\right)x$$



(2)　(1) より　$V=\left(6-2x\right)\left(9-2x\right)x$

$$=4x^3-30x^2+54x\quad\cdots①$$

V=20 のとき

$$4x^3-30x^2+54x=20$$
$$2x^3-15x^2+27x-10=0$$
$$\left(x-2\right)\left(2x-1\right)\left(x-5\right)=0$$

$0<x<3$ より　$x=2,\ \dfrac{1}{2}$

(3)　①より

$$V'=12x^2-60x+54$$

$V'=0$ とすると

$$12x^2-60x+54=0$$
$$2x^2-10x+9=0$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$$

$0<x<3$ における V の増減は，次のようになる。

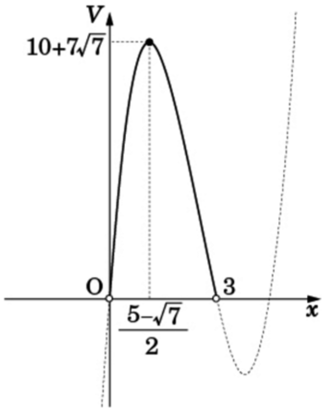
x	(0)	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{2}$	$\cdots$	(3)
V'		＋	0	－	
V	(0)	↗	極大	↘	(0)

$x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$ のとき

$$V=\left(6-2\cdot\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)\left(9-2\cdot\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)\cdot\frac{5-\sqrt{7}}{2}$$
$$=\left(1+\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)\cdot\frac{5-\sqrt{7}}{2}$$
$$=\left(11+5\sqrt{7}\right)\cdot\frac{5-\sqrt{7}}{2}$$
$$=10+7\sqrt{7}$$

よって，切り取った正方形の 1 辺の長さが $\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$ cm のとき，箱の容積 V は最大で

最大値は $\left(10+7\sqrt{7}\right)$ cm^3 である。



4

【解　答】（20 点）

(1)	$\dfrac{\boxed{63}}{\boxed{64}\boxed{65}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{66}}{\boxed{64}\boxed{65}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$	$\dfrac{3}{11}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$	（3 点）
	$\boxed{67}:\boxed{68}$	2:3	（3 点）
	$\boxed{69}:\boxed{70}$	5:6	（3 点）
	$\boxed{71}:\boxed{72}$	4:5	（5 点）
(2)	$\dfrac{\boxed{73}}{\boxed{74}\boxed{75}}$	$\dfrac{7}{13}$	（6 点）

【解　説】

(1)　$6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ より

$$6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+2\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{11}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{11}\times\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}=\frac{5}{11}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって

BD : DC = 2 : 3，AP : PD = 5 : 6

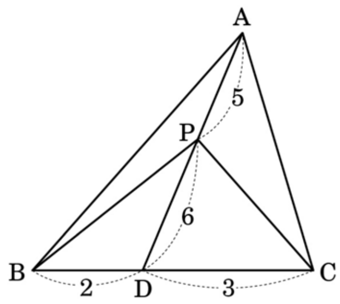
△ABC の面積を S とすると，

△PBD の面積は　$S\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{6}{11}=\dfrac{12}{55}S$

△PCA の面積は　$S\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{11}=\dfrac{3}{11}S$

よって，△PBD と△PCA の面積の比は

$\dfrac{12}{55}S:\dfrac{3}{11}S=4:5$



(2)　①より，

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}=\frac{8}{11}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=-\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{11}\overrightarrow{AC}$$

ここで，AB=AC= a とおくと，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2\cos\theta$ であり，∠BPC=90°より

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=0$

よって

$$\left(\frac{8}{11}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{11}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{11}\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\left(4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$-4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+13\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-3\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=0$$

$$-4a^2+13a^2\cos\theta-3a^2=0$$

$$a^2\left(13\cos\theta-7\right)=0$$

$$\cos\theta=\frac{7}{13}$$