一般入試／数学（中期）

出題のねらい

教科書に出ている基本的な内容が、確実に理解できているかどうかを問うています。問題は全問客観式です。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、ストーリー性をもたせた設問もあり、設問の読解力も求めています。

$\boxed{1}$ 「数学Ⅰ・A」の各分野の基本的な内容を問いました。「数と式」、「2 次関数」、「図形と計量」、「場合の数と確率」、「図形の性質」の各分野から出題しました。

$\boxed{2}$ 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。「式と証明・複素数と方程式」、「図形と方程式」、「三角関数」、「指数関数と対数関数」の各分野から出題しました。

$\boxed{3}$ 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」の分野から出題しました。3 次関数のグラフの接線を求めることができるか、また、その接線が別の点で同じ関数のグラフに交わる条件などについて理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{4}$ 「数学 B」の「ベクトル」の分野から出題しました。内積の計算や交点の位置ベクトルの求め方などのベクトルの基本的な事項が理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{1}$

【解　答】（40 点）

(1)	$\boxed{1}\,\boxed{2}+\boxed{3}\sqrt{5}$	$-5+3\sqrt{5}$	（3 点）
	$a=\boxed{4}\,\boxed{5}$ $b=\boxed{6}\,\boxed{7}$	$a=12$ $b=-4$	（4 点）
(2)	$\boxed{8}$	8	（2 点）
	$\boxed{9}$	1	（2 点）
	$\boxed{10}\,\boxed{11}$	13	（3 点）
(3)	$a=\boxed{12}$	$a=1$	（2 点）
	$M=\boxed{13}$	$M=5$	（2 点）
	$M=\boxed{14}\,\boxed{15}$	$M=20$	（3 点）
(4)	$\boxed{16}\,\boxed{17}\,\boxed{18}\,^\circ$	135°	（2 点）
	$\sqrt{\boxed{19}\,\boxed{20}}$	$\sqrt{30}$	（2 点）
	$\boxed{21}\,\boxed{22}\,\pi$	15π	（2 点）
(5)	$\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}}$	$\dfrac{3}{4}$	（3 点）
	$\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}\,\boxed{27}}$	$\dfrac{5}{12}$	（3 点）
(6)	$\dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$	$\dfrac{7}{2}$	（3 点）
	$\dfrac{\boxed{30}\,\boxed{31}}{\boxed{32}}$	$\dfrac{25}{4}$	（4 点）

【解　説】

(1)　$p=3+\sqrt{5}$，　$pq=4\sqrt{5}$ より

$$q=\frac{4\sqrt{5}}{p}=\frac{4\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{4\sqrt{5}\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=-5+3\sqrt{5}$$

さらに　$a\left(3+\sqrt{5}\right)+b\left(-5+3\sqrt{5}\right)=56$

$$(3a-5b)+(a+3b)\sqrt{5}=56$$

a，b は有理数であるから

$$\begin{cases}3a-5b=56\\a+3b=0\end{cases}$$

よって　$a=12$，$b=-4$

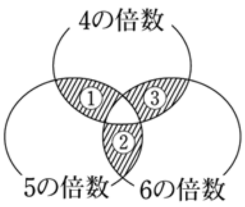
(2)(ⅰ)　4 でも 6 でも割り切れる数は 12 の倍数であるから

$$100=12\times 8+4$$

より，求める個数は 8 個である。

(ⅱ)　4，5，6 の 3 つの数すべてで割り切れる数は 60 の倍数であり，求める個数は 1 個である。

(ⅲ)　4，5，6 のうちどれか 2 つだけで割り切れる数の集合は右の図の斜線部分であるから，求める個数は



①について　$5-1=4$（個）

②について　$3-1=2$（個）

③について　$8-1=7$（個）

よって

$$4+2+7=13\text{（個）}$$

(3)　$y=-x^2+2ax-2a+6$　……………………①

より

$$y=-(x-a)^2+a^2-2a+6\quad\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

であるから，この２次関数のグラフの軸の方程式は

$x=a$

（ⅰ）　$a \leqq 2$　……③のとき

$0 \leqq x \leqq 4$ において，$x=4$ のとき，最小値 -4 をとる。

よって，①より

$-4^2+2a\cdot 4-2a+6=-4$

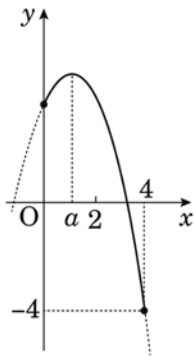
したがって

$a=1$　（③を満たす）

このとき，②より

$y=-(x-1)^2+5$

よって　$M=5$　（$x=1$ のとき）



（ⅱ）　$a>2$　……④のとき

$0 \leqq x \leqq 4$ において，$x=0$ のとき，最小値 -4 をとる。

よって，①より

$-2a+6=-4$

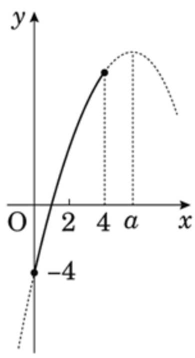
したがって

$a=5$　（④を満たす）

このとき，②より

$y=-(x-5)^2+21$

よって　$M=20$　（$x=4$ のとき）

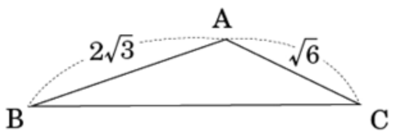


(4)　△ABC の面積が３であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\sin\angle\mathrm{BAC}=3$$

よって　$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

∠BAC は鈍角より　$\angle\mathrm{BAC}=135^\circ$



次に余弦定理より

$$\mathrm{BC}^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cos 135^\circ$$
$$=30$$

$\mathrm{BC}>0$ より　$\mathrm{BC}=\sqrt{30}$

外接円の半径を R とすれば，正弦定理より

$$\frac{\sqrt{30}}{\sin 135^\circ}=2R$$

$R=\sqrt{15}$ であるから外接円の面積は

$$\left(\sqrt{15}\right)^2\pi=15\pi$$

(5)　a が偶数である事象は，a が奇数，すなわち，２つの目の数がともに奇数である事象の余事象だから，求める確率は

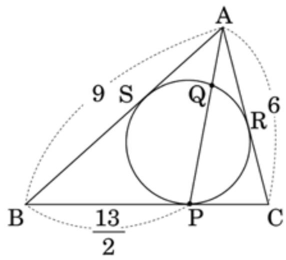
$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

a が６の倍数である事象は，２つのさいころの目の出方 36 通りのうち，右表の○をつけた場合の 15 通りであり，求める確率は

$$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

	1	2	3	4	5	6
1						○
2			○			○
3		○		○		○
4			○			○
5						○
6	○	○	○	○	○	○

(6)　内接円と辺 CA，AB との接点をそれぞれ R，S とすれば



$$\mathrm{BS}=\mathrm{BP}=\frac{13}{2}$$

$$\mathrm{SA}=\mathrm{AR}=9-\frac{13}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\mathrm{PC}=\mathrm{RC}=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$$

次に，方べきの定理より

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\mathrm{AR}^2=\frac{25}{4}$$

$\boxed{2}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\dfrac{1}{\boxed{33}}$	$\dfrac{1}{2}$	（2 点）
	$\boxed{34}$	④	（2 点）
(2)	$\boxed{35}\,\boxed{36}$	-4	（2 点）
	$x^2+\boxed{37}x+\boxed{38}\,\boxed{39}=0$	$x^2+4x+16=0$	（3 点）
(3)	$\dfrac{\boxed{40}}{\boxed{41}}$	$\dfrac{1}{3}$	（2 点）
	$\dfrac{\sqrt{\boxed{42}}-\boxed{43}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	（3 点）
(4)	$\dfrac{X}{\boxed{44}}$	$\dfrac{X}{2}$	（1 点）
	$\boxed{45}X^2+X-\boxed{46}=0$	$2X^2+X-6=0$	（1 点）
	$\boxed{47}\sqrt{\boxed{48}}$	$3\sqrt{3}$	（2 点）
	$\dfrac{1}{\boxed{49}}$	$\dfrac{1}{9}$	（2 点）

【解　説】

(1)　$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

$=(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)$

$=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

よって

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}$$

また x, y, z が実数なので

$$(x-y)^2 \geqq 0,\ (y-z)^2 \geqq 0,\ (z-x)^2 \geqq 0$$

よって，$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geqq 0$ において，等号が成立するための必要十分条件は

$x-y=0$　かつ　$y-z=0$　かつ　$z-x=0$

すなわち，$x=y=z$ のときであり，$\boxed{34}$ に適するのは④である。

(2)　$x^2-2x+4=0$ の 2 つの解が α，β であるから

$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=4$

よって

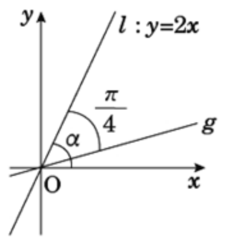
$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-4$$
$$\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=16$$

したがって，α^2，β^2 を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-(-4)x+16=0$

すなわち　$x^2+4x+16=0$

(3)(ⅰ)　直線 l と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると



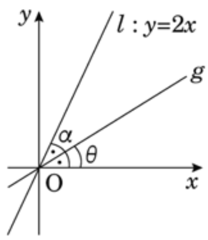
$\tan\alpha=2$

l と g は $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなし，

g が第 1 象限を通るので

$$m=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{2-1}{1+2\cdot1}=\frac{1}{3}$$

(ⅱ)　直線 g と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると



$\alpha=2\theta$，$m=\tan\theta$

であるから

$$\tan\alpha=\tan2\theta$$
$$=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$=\frac{2m}{1-m^2}$$

$\tan\alpha=2$ であるから

$$\frac{2m}{1-m^2}=2$$

$$m^2+m-1=0$$

よって　$m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

直線 g は第 1 象限を通るので，$m>0$ より

$$m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(4) $\log_3 x = X$ とおくと

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{2} = \frac{X}{2}$$

⊛より

$$X^2 + \frac{X}{2} - 3 = 0$$

$$2X^2 + X - 6 = 0$$

$$(2X-3)(X+2) = 0$$

よって　$X = \frac{3}{2},\ -2$

$X = \frac{3}{2}$ のとき　$\log_3 x = \frac{3}{2}$

したがって　$x = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$

$X = -2$ のとき　$\log_3 x = -2$

したがって　$x = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$\boxed{3}$

【解　答】（20 点）

(1)	$y=\boxed{50}\boxed{51}x-\boxed{52}$	$y=12x-5$	（5 点）
(2)	$\boxed{53}p^2+\boxed{54}p+\boxed{55}$	$3p^2+6p+3$	（2 点）
	$-\boxed{56}p^3-\boxed{57}p^2$	$-2p^3-3p^2$	（2 点）
	$\boxed{58}\boxed{59}$	-2	（4 点）
	$y=\boxed{60}x+\boxed{61}$	$y=3x+4$	（3 点）
	$x<\boxed{62}\boxed{63}$, $\boxed{64}\boxed{65}<x<\boxed{66}$	$x<-2$, $-2<x<1$	（4 点）

【解　説】

(1)　$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ より

$$f(1) = 7$$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ より

$$f'(1) = 12$$

よって，点 A（1，$f(1)$）における曲線 C の接線の方程式は

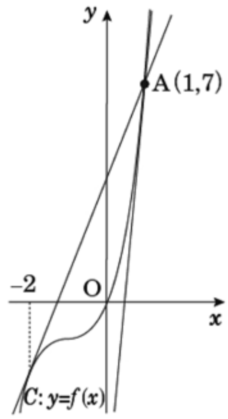
$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

であるから

$$y - 7 = 12(x-1)$$

すなわち

$$y = 12x - 5$$



(2)　点 P（p, $f(p)$）における接線の方程式は

$$y - f(p) = f'(p)(x-p)$$

であるから

$$y - (p^3 + 3p^2 + 3p) = (3p^2 + 6p + 3)(x-p)$$

すなわち

$$y = (3p^2 + 6p + 3)x - 2p^3 - 3p^2 \quad \cdots\cdots ①$$

この接線が点 A（1，7）を通るとき

$$7 = (3p^2 + 6p + 3) - 2p^3 - 3p^2$$

$$p^3 - 3p + 2 = 0$$

$$(p-1)^2(p+2) = 0$$

$p \neq 1$ であるから

$$p = -2$$

このとき，求める接線の方程式は，①より

$$y = 3x + 4$$

さらに，3 次不等式 $f(x)<3x+4$ について，曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=3x+4$ より（ y 軸方向で）下側にある x の範囲を求めて

$$x<-2,\quad -2<x<1$$

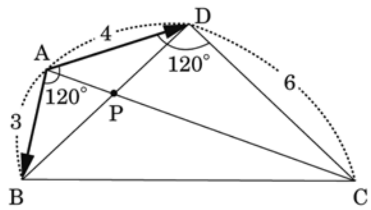
$\boxed{4}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{67}\,\boxed{68}$	-6	（2 点）
	$\boxed{69}$	9	（2 点）
	$\boxed{70}\,\boxed{71}$	12	（2 点）
(2)	$3x-\boxed{72}\,y=3$	$3x-2y=3$	（2 点）
	$-3x+\boxed{73}\,y=6$	$-3x+8y=6$	（2 点）
	$x=\boxed{74}$, $y=\dfrac{\boxed{75}}{\boxed{76}}$	$x=2,\quad y=\dfrac{3}{2}$	（2 点）
(3)	$\boxed{77}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{78}}{\boxed{79}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$	$2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$	（2 点）
	$\boxed{80}\sqrt{\boxed{81}\,\boxed{82}}$	$2\sqrt{19}$	（3 点）
	$\boxed{83}:\boxed{84}$	$2:7$	（3 点）

【解　説】

(1)



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ のなす角は $120°$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\cos 120°$$

$$=3\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のなす角は $60°$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=3\times6\times\cos 60°=9 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ のなす角は $60°$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=4\times6\times\cos 60°=12 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

(2)　$\overrightarrow{DC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ とおくと

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= x\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + y\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)$$

①より

$$9 = x\times 3^2 + y\times(-6)$$
$$3x - 2y = 3 \quad \cdots\cdots\cdots③$$

また

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}\cdot\left(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= x\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right) + y\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$$

②より

$$12 = x\times(-6) + y\times 4^2$$
$$-3x + 8y = 6 \quad \cdots\cdots\cdots④$$

③，④を連立して

$$x = 2,\quad y = \frac{3}{2}$$

(3)　(2)の結果を用いて

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \left(2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= 2\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|2\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}\right|^2$$
$$= 4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 10\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \frac{25}{4}\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$$
$$= 4\times 3^2 + 10\times(-6) + \frac{25}{4}\times 4^2 = 76$$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| > 0$ より　$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

次に，対角線 AC，BD の交点 P について

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$

（k は定数）とおくと

$$\overrightarrow{AP} = k\left(2\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= 2k\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}k\overrightarrow{AD}$$

ここで，P は対角線 BD 上にあるので

$$2k + \frac{5}{2}k = 1$$

よって　$k = \dfrac{2}{9}$

したがって，$\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{9}\overrightarrow{AC}$ であるから

$$AP : PC = 2 : 7$$