大　阪　大　谷　大　学

令和３年度　入学試験問題（一般　中期）

数　学

注意事項

1. 問題は全部で６ページです。解答用紙は１枚です。
2. 解答用紙の所定欄に氏名を記入してください。
3. マーク欄はすべて、正しく黒鉛筆またはシャープペンシルでマークしてください。
4. 解答用紙の所定欄に受験番号を記入し、その下のマーク欄に正しくマークしてください。受験番号のマーク欄は⓪から始まっています。
5. 解答用紙の所定欄に入試区分を正しくマークしてください。
6. 裏表紙の「解答上の注意」に従って、解答用紙の解答記入欄に正しくマークしてください。
7. 問題は持ち帰ってください。

解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙に記載してあります。この問題冊子を裏返して必ず読んでください。

$\boxed{1}$ 次の(1)〜(6)の問いに答えよ。

(1) 実数 p，q が $p=3+\sqrt{5}$，$pq=4\sqrt{5}$ で与えられるとき

$$q=\boxed{1}\boxed{2}+\boxed{3}\sqrt{5}$$

である。

さらに，有理数 a，b が $ap+bq=56$ を満たすとき

$$a=\boxed{4}\boxed{5},\quad b=\boxed{6}\boxed{7}$$

である。

(2) 1から100までの100個の整数のうち

(i) 4でも6でも割り切れる数は全部で $\boxed{8}$ 個ある。

(ii) 4，5，6の3つの数すべてで割り切れる数は全部で $\boxed{9}$ 個ある。

(iii) 4，5，6の3つの数のうち，どれか2つだけで割り切れる数は全部で $\boxed{10}\boxed{11}$ 個ある。

(3) 2次関数 $y=-x^2+2ax-2a+6$（a は定数）の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値を m，最大値を M とする。$m=-4$ のとき

(i) $a\leqq 2$ ならば

$$a=\boxed{12}$$

であり

$$M=\boxed{13}$$

である。

(ii) $a>2$ ならば

$$M=\boxed{14}\boxed{15}$$

である。

(4) $\mathrm{AB}=2\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{6}$，$\angle\mathrm{BAC}$ が鈍角である $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が3であるとき

$$\angle\mathrm{BAC}=\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}^\circ,\quad \mathrm{BC}=\sqrt{\boxed{19}\boxed{20}}$$

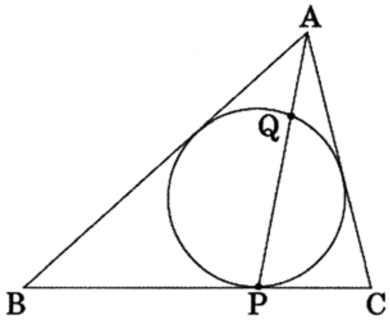
である。このとき，この $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の面積は $\boxed{21}\boxed{22}\pi$ である。

(5)　2つのさいころを同時に投げ，出た目の数の積を a とする。このとき，a が偶数である確率は $\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}}$ であり，a が6の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}\boxed{27}}$ である。

(6)　AB = 9，AC = 6 である△ABC の内接円と辺 BC との接点を P とするとき，$\mathrm{BP} = \dfrac{13}{2}$ である。このとき

$$\mathrm{PC} = \frac{\boxed{28}}{\boxed{29}}$$

である。



また，線分 AP と内接円との P 以外の交点を Q とすれば

$$\mathrm{AP} \cdot \mathrm{AQ} = \frac{\boxed{30}\boxed{31}}{\boxed{32}}$$

である。

$\boxed{2}$ 次の(1)～(4)の問いに答えよ。

(1) x, y, zが実数のとき，等式

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{\boxed{33}}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}$$

が成立するので

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

が示される。

①において，等号が成立するための必要十分条件は $\boxed{34}$ である。ただし，$\boxed{34}$ は，次の⓪～④のうちから当てはまるものを一つ選べ。

⓪ x, y, zのすべてが0

① x, y, zのうち少なくとも１つは0

② $x-y$, $y-z$, $z-x$のうち少なくとも１つは0

③ $x+y+z=0$

④ $x=y=z$

(2) ２次方程式$x^2-2x+4=0$の２つの解をそれぞれα，βとすれば

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{35}\boxed{36}$$

である。したがって，α^2，β^2は２次方程式

$$x^2+\boxed{37}x+\boxed{38}\boxed{39}=0$$

の２つの解である。

(3) 直線l: $y=2x$と第１象限を通る直線g: $y=mx$がある。

(i) ２直線lとgが$\frac{\pi}{4}$の角をなすとき

$$m=\frac{\boxed{40}}{\boxed{41}}$$

である。

(ii) 直線gがx軸と直線lのなす角を二等分するとき

$$m=\frac{\sqrt{\boxed{42}}-\boxed{43}}{2}$$

である。

(4)　$x>0$ のとき，方程式

$$\left(\log_3 x\right)^2+\log_9 x-3=0 \quad \cdots\cdots ②$$

について考える。$\log_3 x=X$ とおくと

$$\log_9 x=\frac{X}{\boxed{44}}$$

であるから，②を X で表すと

$$\boxed{45}\,X^2+X-\boxed{46}=0$$

である。

このXの２次方程式を解いて②の解 x を求めると

$$x=\boxed{47}\sqrt{\boxed{48}},\quad \frac{1}{\boxed{49}}$$

である。

$\boxed{3}$ $f(x)=x^3+3x^2+3x$ とする。曲線 $C: y=f(x)$ とこの曲線上の点 A（1，$f(1)$）を考える。

(1) 点 A における曲線 C の接線の方程式は

$$y=\boxed{50}\boxed{51}x-\boxed{52}$$

である。

(2) 曲線 C 上の点 P（p，$f(p)$）（$p\neq1$）における曲線 C の接線の方程式は

$$y=\left(\boxed{53}p^2+\boxed{54}p+\boxed{55}\right)x-\boxed{56}p^3-\boxed{57}p^2$$

である。この接線が点 A を通るとき，$p\neq1$ より

$$p=\boxed{58}\boxed{59}$$

であるから，この接線の方程式は

$$y=\boxed{60}x+\boxed{61}$$

である。

さらに，3 次不等式 $f(x)<\boxed{60}x+\boxed{61}$ を解くと

$$x<\boxed{62}\boxed{63},\quad \boxed{64}\boxed{65}<x<\boxed{66}$$

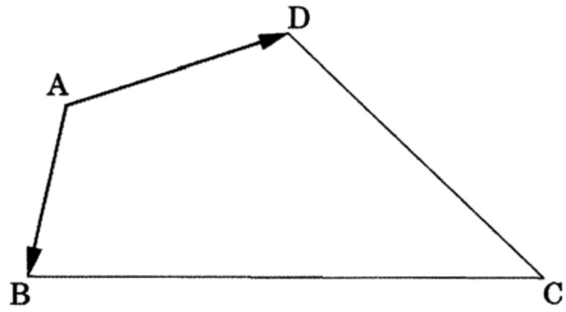
である。

4

右の図の四角形 ABCD において，

AB=3, CD=6, DA=4，$\angle\mathrm{BAD}=120°$，

$\angle\mathrm{ADC}=120°$である。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$の内積を求めると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{67}\boxed{68}$$

である。

また

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boxed{69} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① $$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boxed{70}\boxed{71} \quad \cdots\cdots② $$

である。

(2) x, y を定数とし，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと

①より　$3x-\boxed{72}\,y=3$

②より　$-3x+\boxed{73}\,y=6$

であり

$$x=\boxed{74},\quad y=\frac{\boxed{75}}{\boxed{76}}$$

と求めることができる。

(3) (2)の結果より，対角線 AC について

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{77}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{78}}{\boxed{79}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\boxed{80}\sqrt{\boxed{81}\boxed{82}}$$

である。

また，対角線 AC，BD の交点を P とし，AP : PC を最も簡単な整数の比で表すと

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PC}=\boxed{83}:\boxed{84}$$

である。

解答上の注意

1. 解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2. 問題の文中の $\boxed{\ 1\ }$，$\boxed{\ 2\ }\boxed{\ 3\ }$ などには，特に指示がないかぎり，符号（−），数字（0〜9）が入ります。$\boxed{\ 1\ }$，$\boxed{\ 2\ }$，$\boxed{\ 3\ }$，……の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の 1，2，3，……で示された解答欄にマークして答えなさい。

   例 $\boxed{\ 1\ }\boxed{\ 2\ }\boxed{\ 3\ }$ に 720 と答えたいとき

1	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	●	⑧	⑨
2	⊖	⓪	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
3	⊖	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

   なお，同一の問題文中に $\boxed{\ 1\ }$，$\boxed{\ 2\ }\boxed{\ 3\ }$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は，$\boxed{\ \mathit{1}\ }$，$\boxed{\ \mathit{2}\ }\boxed{\ \mathit{3}\ }$ のように細字で表記します。

3. 分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。例えば，

   $\dfrac{\boxed{\ 4\ }\boxed{\ 5\ }}{\boxed{\ 6\ }}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

   また，それ以上約分できない形で答えなさい。例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを $\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

4. 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

5. 比で解答する場合，最も簡単な整数比で答えなさい。例えば，2：1 を 4：2 のように答えてはいけません。