出題のねらい

教科書に出ている基本的な内容が、確実に理解できているかどうかを問うています。問題は全問客観式です。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、ストーリー性をもたせた設問もあり、設問の読解力も求めています。

1 「数学I・A」の各分野の基本的な内容を問いました。「数と式」、「2次関数」、「図形と計量」、「場合の数と確率」、「整数の性質」、「図形の性質」の各分野から出題しました。

2 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。「式と証明・複素数と方程式」、「三角関数」、「図形と方程式」、「指数関数と対数関数」の各分野から出題しました。

3 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」の分野から出題しました。絶対値を含んだ2次関数のグラフと接線で囲まれた部分の面積などについて問いました。

4 「数学B」の「数列」の分野から出題しました。2つの等差数列に共通に含まれる項を小さい順に並べてできる数列について、初項や和など数列の基本的な内容を問いました。

1

【解　答】(40点)

(1)	$\sqrt{\boxed{1}}+\boxed{2}$	$\sqrt{3}+1$	(2点)
	$\boxed{3}$	0	(2点)
	$\boxed{4}\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{6}$	$2\sqrt{3}-2$	(3点)
(2)	$(\boxed{7}\boxed{8},a-\boxed{9})$	$(-1,a-3)$	(2点)
	$\boxed{10}\boxed{11}$	-4	(3点)
(3)	$\boxed{12}$	2	(2点)
	$\boxed{13}$	8	(4点)
(4)	$\dfrac{\boxed{14}\boxed{15}}{\boxed{16}}$	$\dfrac{12}{5}$	(2点)
	$\dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}\boxed{19}}$	$\dfrac{5}{12}$	(3点)
(5)	$\boxed{20}\boxed{21}$	70	(2点)
	$\boxed{22}\boxed{23}$	34	(4点)
(6)	$\boxed{24}$	9	(2点)
	$\boxed{25}\boxed{26}$	36	(3点)
(7)	$\boxed{27}$	①	(2点)
	$\boxed{28}$	2	(4点)

【解　説】

(1) $\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+1$

$x+1=\sqrt{3}$ の両辺を2乗して

$$\left(x+1\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

よって　$x^2+2x-2=0$

$x^2+2x=2$

より

$$x^3+2x^2=x\left(x^2+2x\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot 2=2\sqrt{3}-2$$

(2) $y=3x^2+6x+a=3\left(x+1\right)^2+a-3$

よって　頂点の座標は $\left(-1\,,\,a-3\right)$

$-2\leqq x\leqq 1$ において最大値5をとるのは，

$x=1$ のときであるから

$3\cdot 1^2+6\cdot 1+a=5$

よって　$a=-4$

(3) 集合 A は9を要素にもつので

$5a-1=9$

よって　$a=2$

このとき，$A=\{2,3,9\}$，$B=\{1,3,5,9\}$ であり，確かに

$A\cap B=\{3,9\}$ となる。

さらに，$A\cup\overline{B}=\{2,3,4,6,7,8,9,10\}$ であるから

$n\left(A\cup\overline{B}\right)=8$

(4) $0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}$$

このとき

$$\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{5}{12}$$

(5)　(ⅰ)の図の最短経路はAからBまで右に4区画，上に4区画，計8区画の移動を行うので

$${}_8C_4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70\quad(\text{通り})$$

(ⅱ)の図の最短経路の数は，(ⅰ)の総数から(ⅱ)の図のAからCまでいき，CからBまでいく最短経路の総数を除いたものである。

よって

$$70-{}_4C_2\cdot{}_4C_2=70-6\cdot6=34\quad(\text{通り})$$

(6)　$x+y=10$ を満たす自然数（x,y）の組は（1，9），（2，8），……，（9，1）の9通り。

$x+y+z=10$ を満たす自然数（x，y，z）の組は $y+z=Y$ とおくと，$x+Y=10$ で（x,Y）の組は $Y\geqq2$ より

（1，9）→（1，1，8），（1，2，7），……，（1，8，1）で（x，y，z）は8通り。

（2，8）→（x，y，z）は7通り。

……

（8，2）→（x，y，z）は1通り。

（9，1）→（x，y，z）の組は存在しない。

よって，自然数（x，y，z）の組は

$$8+7+\cdots\cdots+1=36\quad(\text{通り})$$

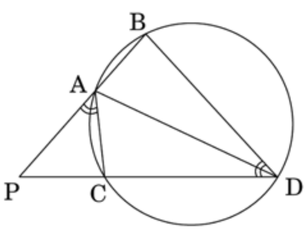
(7)　△PACと△PDBにおいて

∠APC = ∠DPB（共通）

∠PAC = ∠PDB（円に内接する四角形の1つの内角とその向かい合う角の外角は等しい）

よって，2組の角がそれぞれ等しいので

△PAC∽△PDB（⓪）



また，方べきの定理より，PC･PD = PA･PB であるから

$$3\times8=4\times(4+a)$$

よって　$a=2$

2

【解　答】(20点)

(1)	29 30	12	(2点)
	31 32 33	-32	(2点)
	34 35	-7	(2点)
(2)	$\boxed{36}\sin\left(\theta-\frac{\boxed{37}}{\boxed{38}}\pi\right)$	$2\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)$	(2点)
	$\frac{\boxed{39}}{\boxed{40}}\pi,\frac{\boxed{41}}{\boxed{42}}\pi$	$\frac{1}{2}\pi,\frac{7}{6}\pi$	(2点)
(3)	$\sqrt{\boxed{43}\,\boxed{44}}$	$\sqrt{10}$	(2点)
	$(x+\boxed{45})^2+y^2=\boxed{46}\,\boxed{47}$	$(x+5)^2+y^2=10$	(3点)
(4)	48 49	31	(2点)
	50	4	(3点)

【解　説】

(1)　$(x-2y)^3$ の展開式の一般項は

$${}_3C_r x^r(-2y)^{3-r}\quad(r=0,1,2,3)$$

xy^2 は $r=1$ のときであるから，その係数は

$${}_3C_1\cdot1\cdot(-2)^2=12$$

$(x-2y)^4$ の展開式の一般項は

$${}_4C_r x^r(-2y)^{4-r}\quad(r=0,1,2,3,4)$$

xy^3 は $r=1$ のときであるから，その係数は

$${}_4C_1\cdot1\cdot(-2)^3=-32$$

$(1-2i)^4$ の展開式の実部は

$$1^4+{}_4C_2\cdot1^2(-2i)^2+(-2i)^4=-7$$

(2)　式を変形して

$$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)$$

$$=2\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)$$

また

$$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=1$$
$$2\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)=1$$
$$\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$-\frac{1}{3}\pi\leqq\theta-\frac{1}{3}\pi<\frac{5}{3}\pi$

よって

$$\theta-\frac{1}{3}\pi=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$
$$\theta=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{7}{6}\pi\quad\left(\frac{1}{2}\pi<\frac{7}{6}\pi\right)$$

(3)　点 $(1,-2)$ から直線 $3x-y+5=0$ までの距離は

$$\frac{\left|3\cdot1-(-2)+5\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

よって，円 C の半径は　$\sqrt{10}$

円 C' の中心の座標を (a,b) とすると，円 C の中心 $(1,-2)$ と円 C' の中心を結んだ線分の中点は直線 ℓ 上にあるので

$$3\cdot\frac{a+1}{2}-\frac{b+(-2)}{2}+5=0\quad\cdots\cdots①$$

　また，2 つの円の中心を結ぶ直線と直線 $\ell: y=3x+5$ は垂直に交わるので

$$\frac{b-(-2)}{a-1}\cdot3=-1\quad\cdots\cdots②$$

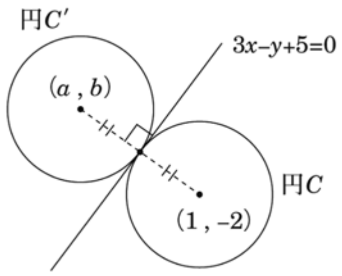
①，②より　$a=-5$，$b=0$

円 C' の半径は円 C の半径と等しいので，円 C' の方程式は

$$\{x-(-5)\}^2+y^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$$

すなわち

$$(x+5)^2+y^2=10$$



(4)　$\log_{10}2^{100}=100\times0.3010$
$\qquad=30.10$

$$2^{100}=10^{30.10}$$

$10^{30}<10^{30.10}<10^{31}$ であるから

$$10^{30}<2^{100}<10^{31}$$

より，2^{100} は 31 桁の数である。

　さらに，2^n が 10 桁の数となるとき

$$10^9\leqq2^n<10^{10}$$

常用対数をとると

$$9\leqq n\cdot\log_{10}2<10$$
$$9\leqq0.3010n<10$$
$$\frac{9}{0.3010}\leqq n<\frac{10}{0.3010}\quad\cdots\cdots①$$
$$\frac{9}{0.3010}=29.9\cdots\cdots,\qquad\frac{10}{0.3010}=33.2\cdots\cdots$$

であるから，①を満たす正の整数 n は

$n=30,31,32,33$ の 4 個

$\boxed{3}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\dfrac{\boxed{51}}{\boxed{52}}$	$\dfrac{9}{2}$	（2 点）
(2)	$y=x+\boxed{53}$	$y=x+1$	（2 点）
	$\boxed{54}$	4	（2 点）
	$\boxed{55}\boxed{56}$	-1	（3 点）
	$\boxed{57}\sqrt{\boxed{58}}$	$2\sqrt{5}$	（4 点）
(3)	$\boxed{59}$	2	（2 点）
	$\dfrac{\boxed{60}\boxed{61}\sqrt{\boxed{62}}}{\boxed{63}}-\boxed{64}$	$\dfrac{20\sqrt{5}}{3}-9$	（5 点）

【解　説】

(1)　$y=x^2-3x$ と x 軸の交点の x 座標は 0，3

よって，求める面積は

$$-\int_0^3\left(x^2-3x\right)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=-\left(9-\frac{27}{2}\right)=\frac{9}{2}$$

(2)　$y=-x^2+3x$ において

$$y'=-2x+3$$

$x=1$ のとき接線の傾きは 1 であるから，点 T(1，2) における接線の方程式は　$y-2=x-1$　より

$$y=x+1$$

このとき，放物線 $y=x^2-3x$　と　直線 $y=x+1$ の共有点の x 座標が α，β であるから

$$x^2-3x=x+1$$
$$x^2-4x-1=0$$

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=4,\quad \alpha\beta=-1$$

ここで

$$\left(\beta-\alpha\right)^2=\left(\alpha+\beta\right)^2-4\alpha\beta$$
$$=4^2-4\cdot(-1)=20$$

$\beta>\alpha$ より，$\beta-\alpha>0$ であるから

$$\beta-\alpha=2\sqrt{5}$$

(3)

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{\left(x+1\right)-\left(x^2-3x\right)\right\}dx-\frac{9}{2}\times2$$
$$=\int_\alpha^\beta\left(-x^2+4x+1\right)dx-9$$
$$=\frac{1}{6}\left(\beta-\alpha\right)^3-9$$

(2)より

$$S=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{5}\right)^3-9=\frac{1}{6}\cdot40\sqrt{5}-9$$
$$=\frac{20\sqrt{5}}{3}-9$$

【別解】

$$S=\int_\alpha^\beta\left(-x^2+4x+1\right)dx-9$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\right]_\alpha^\beta-9$$
$$=-\frac{1}{3}\left(\beta^3-\alpha^3\right)+2\left(\beta^2-\alpha^2\right)+\left(\beta-\alpha\right)-9$$
$$=-\frac{1}{3}\left(\beta-\alpha\right)\left(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\right)+2\left(\beta-\alpha\right)\left(\beta+\alpha\right)+\left(\beta-\alpha\right)-9$$
$$=-\frac{1}{3}\left(\beta-\alpha\right)\left\{\left(\alpha+\beta\right)^2-\alpha\beta\right\}+2\left(\beta-\alpha\right)\left(\alpha+\beta\right)+\left(\beta-\alpha\right)-9$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{5}\left\{4^2-\left(-1\right)\right\}+2\cdot2\sqrt{5}\cdot4+2\sqrt{5}-9$$
$$=\frac{20\sqrt{5}}{3}-9$$

4

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{65}n+\boxed{66}$	$5n+4$	（2 点）
	$\boxed{67}n+\boxed{68}$	$8n+3$	（2 点）
	$\boxed{69}\boxed{70}$	19	（1 点）
(2)	$\boxed{71}\ell-\boxed{72}m=\boxed{73}\boxed{74}$	$5\ell-8m=-1$	（2 点）
	$\ell=\boxed{75}$ $m=\boxed{76}$	$\ell=3$ $m=2$	（2 点）
	$\boxed{77}$	5	（2 点）
	$\boxed{78}\boxed{79}k-\boxed{80}\boxed{81}$	$40k-21$	（3 点）
(3)	$\boxed{82}\boxed{83}\boxed{84}\boxed{85}$	1990	（3 点）
	$\boxed{86}\boxed{87}$	16	（3 点）

【解　説】

(1)　等差数列$\{a_n\}$は初項 9，公差 5 より

$$a_n=9+(n-1)\cdot5=5n+4$$

同様に　$b_n=11+(n-1)\cdot8=8n+3$

また　$c_1=19$

(2)　数列$\{a_n\}$の第ℓ項と，数列$\{b_n\}$の第 m 項が等しいとすると

$$5\ell+4=8m+3$$
$$5\ell-8m=-1 \quad \cdots\cdots①$$

$c_1=19$　において　$5\ell+4=19$，$8m+3=19$

よって，$\ell=3$，$m=2$　であるから

$$5\cdot3-8\cdot2=-1 \quad \cdots\cdots②$$

①－②　より

$$5(\ell-3)-8(m-2)=0$$

$$5(\ell-3)=8(m-2)$$

5 と 8 は互いに素であるから，$\ell-3$ は 8 の倍数である。

$$\ell-3=8(k-1)\quad (k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$\ell=8k-5$$

したがって，数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$に共通に含まれる項は，数列$\{a_n\}$の第$(8k-5)$項であり

$$c_k=a_\ell=a_{8k-5}$$
$$=5(8k-5)+4$$
$$=40k-21$$

(3)　数列$\{c_n\}$の初項から第 10 項までの和は，(2)より

$$\sum_{k=1}^{10}c_k=\sum_{k=1}^{10}(40k-21)$$
$$=40\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11-21\cdot10$$
$$=1990$$

数列$\{c_n\}$の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}(40k-21)$$
$$=40\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-21n$$
$$=20n^2-n$$

よって

$n=15$ のとき　$20\cdot15^2-15=4485$

$n=16$ のとき　$20\cdot16^2-16=5104$

であるから，求める n の値は　$n=16$