出題のねらい

教科書に出ている基本的な内容が、確実に理解できているかどうかを問うています。問題は全問客観式です。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、ストーリー性をもたせた設問では、設問の読解力も求めています。

1 「数学I・A」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「数と式」、「２次関数」、「図形と計量」、「場合の数と確率」、「図形の性質」、「整数の性質」から出題しました。

2 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「式と証明・複素数と方程式」、「図形と方程式」、「三角関数」、「指数関数と対数関数」から出題しました。

3 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」から出題しました。３次方程式が異なる３つの実数解をもつときの条件を、２次方程式が異なる２つの解をもつ条件を用いる解法と３次関数が x 軸と異なる３点で交わる条件を用いる解法が理解できているかどうかを問いました。

4 「数学 B」の「数列」から出題しました。等差数列の一般項や等比数列の公比など、数列の基本的な内容を問いました。

1

【解　答】（40 点）

(1)	$\boxed{1}\boxed{2}$	32	(2 点)
	$\boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}$	$2\sqrt{7}$	(2 点)
	$\boxed{5}+\sqrt{\boxed{6}}$	$3+\sqrt{7}$	(2 点)
(2)	$\boxed{7}$	1	(2 点)
	$\boxed{8}$	5	(2 点)
	$\boxed{9} \leqq a \leqq \boxed{10}$	$2 \leqq a \leqq 4$	(2 点)
(3)	$\sqrt{\boxed{11}}$	$\sqrt{3}$	(2 点)
	$\boxed{12}$	2	(2 点)
	$\boxed{13}-\sqrt{\boxed{14}}$	$2-\sqrt{3}$	(3 点)
(4)	$\boxed{15}\boxed{16}\sqrt{\boxed{17}}$	$18\sqrt{2}$	(2 点)
	$\dfrac{\boxed{18}\sqrt{\boxed{19}}}{\boxed{20}}$	$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$	(2 点)
	$\dfrac{\sqrt{\boxed{21}}}{\boxed{22}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	(3 点)
(5)	$a=\boxed{23}$, $b=\boxed{24}$	$a=1$, $b=8$	(2 点)
	$a=\boxed{25}$, $b=\boxed{26}$	$a=2$, $b=3$	(2 点)
(6)	$\boxed{27}\boxed{28}$	63	(2 点)
	$\boxed{29}\boxed{30}$	45	(3 点)
(7)	$(x+\boxed{31})(y-\boxed{32})=\boxed{33}$	$(x+1)(y-2)=6$	(2 点)
	$\boxed{34}$	3	(3 点)

【解　説】

(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot 2=32$

また　$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=32-2\cdot 2=28$

$x>y$ より　$x-y=2\sqrt{7}$

したがって，$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2\sqrt{7} \end{cases}$ を解いて

$x=3+\sqrt{7}$　$\left(y=3-\sqrt{7}\right)$

(2)　$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$　$(0 \leqq x \leqq a)$

頂点の座標は $(2\,,1)$

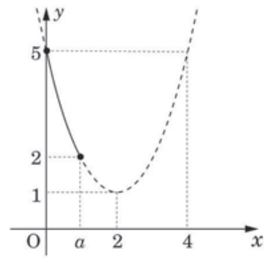
最小値が 2 となるのは，$0<a<2$ で

$a^2-4a+5=2$ のときであるから

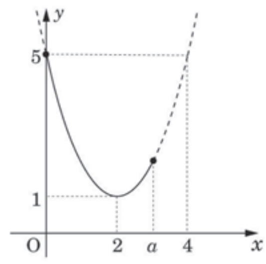
$(a-1)(a-3)=0$

よって　$a=1$

このとき，$0 \leqq x \leqq 1$ より，最大値は　5



$0 \leqq x \leqq a$ において，最小値が 1，最大値が 5 となるとき，下のグラフより　$2 \leqq a \leqq 4$



(3)　直角三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=1$，$\angle\mathrm{ACB}=30^\circ$ より　$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=2$

△ACD は，$\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{CDA}=15^\circ$ で CA=DC の二等辺三角形であるから

$\mathrm{DC}=2$，$\mathrm{BD}=2+\sqrt{3}$

よって

$$\tan 15^\circ=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

(4)　BC の中点を M とすると，直角三角形 ABM において三平方の定理より

$$\mathrm{AM}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$$

よって，△ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sqrt{2}=18\sqrt{2}$

内接円の半径を r とすると，面積について △IAB＋△IAC＋△IBC＝△ABC より

$$\frac{1}{2}r(9+9+6)=18\sqrt{2}$$

よって　$r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

重心 G は線分 AM を 2：1 に内分するから

$$\mathrm{GM}=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

よって　$\mathrm{IG}=\mathrm{GM}-\mathrm{IM}=2\sqrt{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(5)(i)　$1\in B$ であるから

$5a-4=1$

$a=1$

このとき，$B\subset A$ より $3\in A$ であるから

$1^2+1\cdot b-6=3$

$b=8$

(ii)　$A=C$ であるとき，

$$\begin{cases} a^2+ab-6=4 \\ a^2+ab-a-3=5 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=3$

(6)　3 の倍数が 2 枚となる選び方は，3 枚の 3 の倍数から 2 枚，残り 7 枚から 2 枚を選ぶ場合だから

$${}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_2=\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}\times\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=63\ \text{（通り）}$$

また，差が 7 となる最小の数と最大の数の組合せは 1 と 8，2 と 9，3 と 10 の 3 通りであり，その各々の場合について，最小値と最大値のカード以外の 2 枚のカードは，最小値と最大値の数の間にある 6 枚から 2 枚選べばよいので，求める選び方は

$$3\times{}_6\mathrm{C}_2=3\times\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=45\ \text{（通り）}$$

(7)　$xy-2x+y=8$

$$(x+1)(y-2)+2=8$$

$$(x+1)(y-2)=6$$

x，y が自然数であるから

$x+1\geqq 2$，$y-2\geqq -1$

よって

$$(x+1,\ y-2)=(2,3),\ (3,2),\ (6,1)$$

$$(x,\ y)=(1,5),\ (2,4),\ (5,3)$$

したがって，$(x,\ y)$ の組は 3 組ある。

$\boxed{2}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{35}\sqrt{\boxed{36}\boxed{37}}$	$2\sqrt{10}$	（2 点）
	$\boxed{38}\boxed{39}$	20	（3 点）
(2)	$\boxed{40}$	0	（2 点）
	$\boxed{41}\boxed{42}$	-1	（2 点）
(3)	$\left(t+\dfrac{\boxed{43}}{\boxed{44}}\right)^2-\dfrac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$	$y=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$	（2 点）
	$-\sqrt{\boxed{47}}\leqq t\leqq\sqrt{\boxed{48}}$	$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$	（2 点）
	$\sqrt{\boxed{49}}$	$\sqrt{2}$	（3 点）
(4)	$x^2-\boxed{50}x+\boxed{51}<0$	$x^2-6x+5<0$	（2 点）
	$\boxed{52}<x<\boxed{53}$	$3<x<5$	（2 点）

【解　説】

(1)　2 点 BC 間の距離は

$\sqrt{(6-4)^2+(-3-3)^2}=2\sqrt{10}$　であり，直線 BC の方程式は，$y=\dfrac{-3-3}{6-4}(x-4)+3$ より

$3x+y-15=0$

よって，点 A から直線 BC までの距離が

$\dfrac{|3\cdot(-2)+1-15|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}$ であるから，△ABC の面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot\dfrac{20}{\sqrt{10}}=20$

(2)　$i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+i(-1)+(-1)^2=0$

$i+i^2+i^3+i^4+\cdots\cdots+i^{2019}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots\cdots+i^{2016}(i+i^2+i^3)$

$=(-1)^{1008}\{i+(-1)+i(-1)\}$

$=-1$

(3)　$\sin\theta+\cos\theta=t$

両辺を 2 乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=t^2$

$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

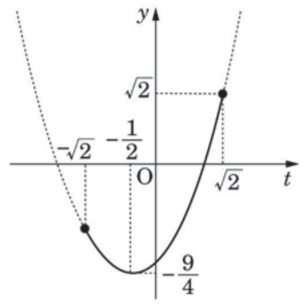
よって　$y=(t^2-1)+t-1=t^2+t-2=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$

ここで，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$　であるから，

$0\leqq\theta<2\pi$ において　$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$　より

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

したがって，$t=\sqrt{2}$ のとき，y の最大値は $\sqrt{2}$ となる。



(4)　真数は正より　$\begin{cases}x-2>0\\x-3>0\\x+1>0\end{cases}$

よって　$x>3$　…　①

$f(x)<0$ より $\log_3(x-2)(x-3)<\log_3(x+1)$ のとき，

底 3 は 1 より大きいから

$(x-2)(x-3)<(x+1)$

$x^2-6x+5<0$

よって　$1<x<5$

①より　$3<x<5$

$\boxed{3}$

【解　答】（20 点）

(i)	$x-\boxed{54}$	$x-2$	（2 点）
	$x^2-ax+\boxed{55}$	x^2-ax+1	（2 点）
	$a<\boxed{56}\boxed{57}$, $\boxed{58}<a<\dfrac{\boxed{59}}{\boxed{60}}, \dfrac{\boxed{61}}{\boxed{62}}<a$	$a<-2$, $2<a<\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}<a$	（4 点）
(ii)	$\boxed{63}x^2-(\boxed{64}a+\boxed{65})x+\boxed{66}a+\boxed{67}$	$3x^2-(2a+4)x+2a+1$	（3 点）
	$(x-\boxed{68})\{\boxed{69}x-(\boxed{70}a+\boxed{71})\}$	$(x-1)\{3x-(2a+1)\}$	（3 点）
	$a\neq\boxed{72}$	$a\neq1$	（2 点）
	$(a+\boxed{73})(a-\boxed{74})(\boxed{75}a-\boxed{76})^2>0$	$(a+2)(a-2)(2a-5)^2>0$	（4 点）

【解　説】

(i)　$x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-2=0$ ……① は，$x=2$ を解にもつから①の左辺は $(x-2)(x^2-ax+1)$ と因数分解でき，①は $x=2$ または $x^2-ax+1=0$ と考えることができる。

①が異なる 3 つの実数解をもつとき $x^2-ax+1=0$ の解は $x\neq2$ より

$$2^2-a\cdot2+1\neq0 \quad \text{すなわち} \quad a\neq\frac{5}{2}$$

また，$x^2-ax+1=0$ の判別式を D とすると，異なる 2 つの実数解をもつから

$$D=a^2-4>0$$

よって　$a<-2, 2<a$

したがって　$a<-2, 2<a<\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}<a$

(ⅱ)　$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-2$ とすると

$$f'(x)=3x^2-(2a+4)x+2a+1$$

$$=(x-1)\{3x-(2a+1)\}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$, $\dfrac{2a+1}{3}$

①が異なる 3 つの実数解をもつと極値をもつから

$$1\neq\frac{2a+1}{3} \quad \text{すなわち} \quad a\neq1$$

また，$f(1)f\left(\dfrac{2a+1}{3}\right)<0$ から

$$-\frac{1}{27}(a+2)(a-2)(2a-5)^2<0$$

$$(a+2)(a-2)(2a-5)^2>0 \quad \cdots\cdots④$$

$2a-5=0$　つまり　$a=\dfrac{5}{2}$ のとき，④は成り立たないから　$a\neq\dfrac{5}{2}$

このとき，$(2a-5)^2>0$ より，④は

$$(a+2)(a-2)>0$$

よって　$a<-2$，$a>2$

したがって，$a\neq\dfrac{5}{2}$，$a\neq1$ より，求める a の値の範囲は

$$a<-2,\ 2<a<\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}<a$$

4

【解　答】(20点)

(1)	$\boxed{77}\boxed{78}$	-5	(2点)
	$\boxed{79}$	3	(2点)
	$\boxed{80}n-\boxed{81}$	$3n-8$	(3点)
(2)	$\dfrac{\boxed{82}}{\boxed{83}}$	$\dfrac{1}{2}$	(2点)
	$\dfrac{1}{\boxed{84}\boxed{85}}$	$\dfrac{1}{32}$	(2点)
	$\dfrac{1}{\boxed{86}^{\boxed{87}}}$	$\dfrac{1}{2^n}$ (①)	(3点)
(3)	$\boxed{88}^{n}-\boxed{89}$	2^n-1	(3点)
	$\boxed{90}$	8	(3点)

【解　説】

(1)　等差数列$\{a_n\}$の初項をa_1，公差をdとすると

$$\begin{cases} a_1+5d=10 \\ a_1+9d=22 \end{cases}$$

これを解いて　$a_1=-5$，$d=3$

よって　$a_n=-5+(n-1)\cdot 3=3n-8$

(2)　等比数列$\{b_n\}$の公比をrとすると

$$b_5=r^{5-1}=\frac{1}{16}$$

$r>0$より　$r=\dfrac{1}{2}$

よって，$b_n=1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ であるから

$$b_5-b_6=\frac{1}{16}-\frac{1}{32}=\frac{1}{32}$$

$$b_n-b_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2^n}\quad (①)$$

(3)　(2)より，$\dfrac{1}{b_n}=2^{n-1}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}$$
$$=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}>a_{85}$ より

$$2^n-1>3\cdot 85-8$$
$$2^n>248$$

$2^7=128$，$2^8=256$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}>a_{85}$ を満たす最小の自然数nは

$n=8$