出題のねらい

教科書に出ている基本的な内容が、確実に理解できているかどうかを問うています。問題は全問客観式です。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、ストーリー性をもたせた設問では、設問の読解力も求めています。

1 「数学Ⅰ・A」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「数と式」、「2次関数」、「図形と計量」、「場合の数と確率」、「整数の性質」から出題しました。

2 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「式と証明・複素数と方程式」、「三角関数」、「指数関数と対数関数」から出題しました。

3 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」から出題しました。放物線外の点から放物線に引いた接線と放物線で囲まれた部分の面積などについて問いました。

4 「数学B」の「ベクトル」から出題しました。内積の計算や交点の位置ベクトルの求め方などのベクトルの基本的事項が理解できているかどうかを問いました。

1

【解　答】（40点）

(1)	$(x+\boxed{1})(x+\boxed{2})$	$(x+4)(x+6)$	（2点）
	$(x-\boxed{3})(x-\boxed{4})(x-\boxed{5})(x-\boxed{6})$	$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$	（3点）
(2)	$\boxed{7}\boxed{8}<2x-y<\boxed{9}$	$-9<2x-y<4$	（2点）
	$\boxed{10}$	0	（3点）
(3)	$\boxed{11}$	1	（2点）
	$\boxed{12}$	4	（2点）
(4)	$\boxed{13}\boxed{14}^\circ$	60°	（2点）
	$\sqrt{\boxed{15}}$	$\sqrt{6}$	（3点）
	$\boxed{16}+\sqrt{\boxed{17}}$	$1+\sqrt{3}$	（3点）
(5)	$\boxed{18}\boxed{19}\boxed{20}$	254	（3点）
	$\boxed{21}\boxed{22}\boxed{23}$	127	（3点）
(6)	$\boxed{24}$	6	（2点）
	$\boxed{25}\boxed{26}\boxed{27}$	330	（2点）
	$\boxed{28}$	3	（3点）
(7)	$\boxed{29}$	1	（2点）
	$\boxed{30}\boxed{31}$	−2	（3点）

【解　説】

(1)　$x^2+10x+24$ を因数分解すると　$(x+4)(x+6)$

$x^2-5x=t$ とすると

$$(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=t^2+10t+24$$
$$=(t+4)(t+6)$$
$$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

(2)　$-\frac{5}{2}<x<1$，$-2<y<4$ より

$-5<2x<2$，　$-4<-y<2$

辺々加えると　$-9<2x-y<4$

よって，$0\leqq|2x-y|<9$ となり，最小値は 0

(3)　$y=(x-p)^2+q$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に−5だけ平行移動すると，頂点は点（$p+1$，$q-5$）となる。

$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ の頂点は点（2，−1）より

$p+1=2$，　$q-5=-1$

よって　$p=1$，$q=4$

(4)　$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)$

$=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)$

$=60^\circ$

また，正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$$

よって　$BC=\sqrt{6}$

余弦定理より

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$$
$$\left(\sqrt{6}\right)^2=2^2+AC^2-2\cdot 2\cdot AC\cdot\frac{1}{2}$$
$$AC^2-2AC-2=0$$

これを解くと

$AC=1\pm\sqrt{3}$

$AC>0$ より，$AC=1+\sqrt{3}$

(5)　8人を2つのグループA，Bに分ける分け方は

$2^8-2=256-2=254$（通り）

8人を2つのグループに分ける分け方はA，Bの区別をなくせばよいので，

$\frac{254}{2!}=127$（通り）

(6)　$30=2\cdot3\cdot5$，　$66=2\cdot3\cdot11$ より最大公約数は，$2\times3=6$ で，最小公倍数は，$2\times3\times5\times11=330$ である。

また，$a=6a'$，$b=6b'$

$a<b$ より $a'<b'$ で a'，b' は互いに素とすると

$$a+b=6a'+6b'=84$$

よって　$a'+b'=14$

a'，b' は互いに素より

$$(a',\ b')=(1,\ 13),\ (3,\ 11),\ (5,\ 9)$$

の 3 組ある。

(7)　2 次方程式 $x^2+(k+3)x+4=0$ の判別式を D とすると

$$D=(k+3)^2-4\cdot4$$
$$=k^2+6k-7$$

重解をもつとき

$$D=0$$
$$k^2+6k-7=0$$
$$k=-7,\ 1$$

k は正の定数なので

$$k=1$$

となり，このとき 2 次方程式は

$$x^2+4x+4=0$$
$$(x+2)^2=0$$
$$x=-2$$

2

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{32}$	2	(2 点)
	$\boxed{33}$	5	(2 点)
(2)	$\dfrac{\boxed{34}\sqrt{\boxed{35}}}{\boxed{36}}$	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	(2 点)
	$\dfrac{\boxed{37}\boxed{38}}{\boxed{39}}$	$\dfrac{-1}{4}$	(2 点)
	$\dfrac{\sqrt{\boxed{40}\boxed{41}}-\boxed{42}\sqrt{\boxed{43}}}{\boxed{44}\boxed{45}}$	$\dfrac{\sqrt{15}-2\sqrt{2}}{12}$	(2 点)
(3)	$\dfrac{\boxed{46}\boxed{47}\pm\sqrt{\boxed{48}}i}{\boxed{49}}$	$\dfrac{-5\pm\sqrt{7}i}{2}$	(1 点)
	$x^2+\boxed{50}x+\boxed{51}$	x^2+3x+4	(2 点)
(4)	$\boxed{52}\boxed{53}<x<\boxed{54}\boxed{55}$	$-4<x<12$	(2 点)
	$-(x-\boxed{56})^2+\boxed{57}\boxed{58}$	$-(x-4)^2+64$	(2 点)
	$\boxed{59}$	①	(1 点)
	$\boxed{60}\boxed{61}$	-6	(2 点)

【解　説】

(1)　$a>0$ より　$a+1>0$，$\dfrac{9}{a+1}>0$

よって，相加平均・相乗平均の関係から

$$a+\frac{9}{a+1}=a+1+\frac{9}{a+1}-1$$
$$\geqq 2\sqrt{(a+1)\cdot\frac{9}{a+1}}-1$$
$$=2\cdot3-1$$
$$=5$$

等号成立は，$a+1=\dfrac{9}{a+1}$ のときである。

これを解くと　$a=2$，-4

$a>0$ より　$a=2$

よって，$a=2$ のとき，最小値 5 をとる。

(2)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから

$$\cos\alpha>0,\quad \cos\beta<0$$

ゆえに

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=-\frac{1}{4}$$

よって

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{2}}{12}$$

(3)　2 次方程式 $x^2+5x+8=0$ を解くと

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{2}$$

である。この解が α，β であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-5,\quad \alpha\beta=8$$

よって

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=-3$$
$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha+\beta+\alpha\beta+1=4$$

となり，$\alpha+1$，$\beta+1$ を解とする 2 次方程式の 1 つは，$x^2+3x+4=0$ である。

(4)　関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(12-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x+4)$ ……① において

真数が正より　$12-x>0$，$x+4>0$

よって　$-4<x<12$

このとき，①を変形すると

$$y=\log_{\frac{1}{2}}(12-x)(x+4)$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+8x+48)$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}\left\{-(x-4)^2+64\right\}$$

対数の底が $\frac{1}{2}$ なので，真数が最大のとき，y は最小値をとる。すなわち，$x=4$ のとき yは最小（⑪）で，このとき

$$y=\log_{\frac{1}{2}}64=-6$$

3

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{62}x-\boxed{63}$	$2x-3$	（2 点）
	$(\boxed{64}t-\boxed{65})x-t^2+\boxed{66}$	$(2t-3)x-t^2+6$	（2 点）
	$\boxed{67}$，$\boxed{68}$	0，4	（3 点）
(2)	$\boxed{69}\boxed{70}x+\boxed{71}$	$-3x+6$	（2 点）
	$\boxed{72}x-\boxed{73}\boxed{74}$	$5x-10$	（2 点）
	$\dfrac{\boxed{75}\boxed{76}}{\boxed{77}}$	$\dfrac{16}{3}$	（3 点）
(3)	$\dfrac{\boxed{78}\boxed{79}}{\boxed{80}}$	$\dfrac{32}{3}$	（3 点）
	$\dfrac{\boxed{81}}{\boxed{82}}$	$\dfrac{1}{2}$	（3 点）

【解　説】

(1)　$y'=2x-3$ より，点 P における接線の方程式は

$$y-(t^2-3t+6)=(2t-3)(x-t)$$
$$y=(2t-3)x-t^2+6$$

この直線が点（2，0）を通るとき

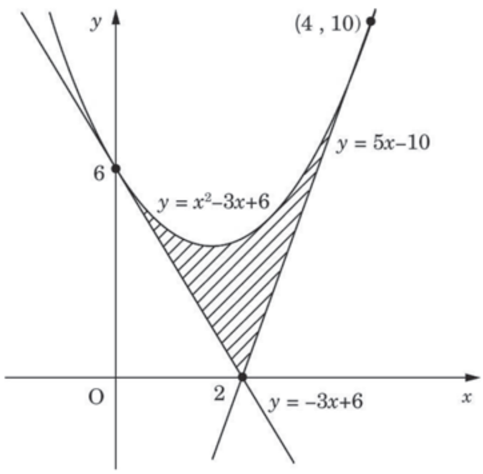
$$0=(2t-3)\cdot2-t^2+6$$
$$t^2-4t=0$$

よって　$t=0,4$

(2)　(1)より，放物線①に点(2，0)から引いた 2 本の接線の方程式は，$y=-3x+6$，$y=5x-10$ である。

また，$0\leqq x\leqq4$ の範囲で $x^2-3x+6\geqq-3x+6$，$x^2-3x+6\geqq5x-10$ なので

$$S_1=\int_0^2\left\{(x^2-3x+6)-(-3x+6)\right\}dx$$
$$+\int_2^4\left\{(x^2-3x+6)-(5x-10)\right\}dx$$
$$=\int_0^2x^2dx+\int_2^4(x^2-8x+16)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+16x\right]_2^4$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$



(3)　2つの接点（0，6），（4，10）を通る直線の方程式は

$$y-6=\frac{10-6}{4-0}(x-0)$$

よって　$y=x+6$

また，$0\leqq x\leqq 4$ の範囲で $x+6\geqq x^2-3x+6$ であるから，求める面積 S_2 は

$$\begin{aligned}S_2&=\int_0^4\left\{(x+6)-(x^2-3x+6)\right\}dx\\&=\int_0^4(-x^2+4x)dx\\&=-\int_0^4 x(x-4)dx\\&=\frac{(4-0)^3}{6}=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

よって　$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{16}{3}}{\frac{32}{3}}=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\dfrac{\boxed{83}\boxed{84}\boxed{85}}{\boxed{86}}$	$\dfrac{-15}{2}$	（3 点）
(2)	$\boxed{87}$	0	（3 点）
	$\dfrac{\boxed{88}}{\boxed{89}}$	$\dfrac{1}{2}$	（3 点）
	$\dfrac{\boxed{90}\boxed{91}}{\boxed{92}}$	$\dfrac{11}{9}$	（4 点）
	$\dfrac{\boxed{93}\boxed{94}}{\boxed{95}\boxed{96}}$	$\dfrac{13}{15}$	（4 点）
(3)	$\dfrac{\boxed{97}\boxed{98}}{\boxed{99}\boxed{100}}$	$\dfrac{39}{55}$	（3 点）

【解　説】

(1)　$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2$

$$=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2$$

$\left|\vec{b}\right|=5$，$\left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=7$ を代入すると

$$7^2=5^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{15}{2}$

(2)　点 M，N は辺 AB，AC の中点なので，AB ⊥ OM，AC ⊥ ON であるから，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ が成り立つ。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO}\right)\\&=\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-s\vec{a}-t\vec{b}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-s\right)\left|\vec{a}\right|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

よって　$\left(\dfrac{1}{2}-s\right)\left|\vec{a}\right|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　……①

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{ON}&=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO}\right)\\&=\vec{b}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}-s\vec{a}-t\vec{b}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-t\right)\left|\vec{b}\right|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

よって　$\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\left|\vec{b}\right|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　……②

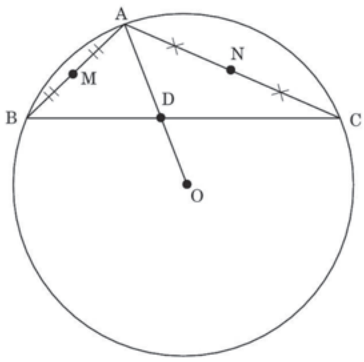
①，②に$\left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\vec{b}\right|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{15}{2}$を代入して整理すると

$$6s-5t=3,\quad 3s-10t=-5$$

したがって，s，tの値は

$$s=\frac{11}{9},\quad t=\frac{13}{15}$$

(3)



(2)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{11}{9}\vec{a}+\frac{13}{15}\vec{b}$$
$$=\frac{55}{45}\vec{a}+\frac{39}{45}\vec{b}$$
$$=\frac{94}{45}\times\frac{55\vec{a}+39\vec{b}}{94}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{55\vec{a}+39\vec{b}}{94}$$

したがって

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=39:55$$

より

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{39}{55}$$