大 阪 大 谷 大 学

平成 31 年度　入学試験問題（一般　中期）

数　学

注意事項

1. 問題は全部で 5 ページです。解答用紙は 1 枚です。
2. 解答用紙の所定欄に氏名を記入してください。
3. マーク欄はすべて、正しく黒鉛筆またはシャープペンシルでマークしてください。
4. 解答用紙の所定欄に受験番号を記入し、その下のマーク欄に正しくマークしてください。受験番号のマーク欄は⓪から始まっています。
5. 解答用紙の所定欄に入試区分を正しくマークしてください。
6. 裏表紙の「解答上の注意」に従って、解答用紙の解答記入欄に正しくマークしてください。
7. 問題は持ち帰ってください。

解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙に記載してあります。この問題冊子を裏返して必ず読んでください。

$\boxed{1}$ 次の(1)～(7)の問いに答えよ。

(1) $3+\sqrt{3}$ の整数部分をa，小数部分をbとすると，$b=\sqrt{\boxed{1}}-\boxed{2}$ であり，

$-\dfrac{1}{2}a+b^2+2b=\boxed{3}$ である。

(2) 放物線 $y=x^2-4ax+3a^2-4a+5$ の頂点の座標は $\left(\boxed{4}\,a\,,\,-a^2-\boxed{5}\,a+\boxed{6}\right)$

である。この放物線がx軸と異なる 2 点で交わるとき，定数aの値の範囲は $a<-\boxed{7}$，

$\boxed{8}<a$ であり，この放物線がx軸から切り取る線分の長さが 2 となるのは

$a=-\boxed{9}\pm\sqrt{\boxed{10}\boxed{11}}$ のときである。

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$，

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\boxed{14}$ である。

(4) △ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC の中点を M，直線 AM と直線 CD の交点を E とする。このとき，$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{ED}}=\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}}$ である。また，△AED の面積をS_1，

△CEM の面積をS_2とすると $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}}$ である。

(5) 一般に，命題とその命題の $\boxed{19}$ の真偽は一致する。aを整数とする。命題「a^2が 8 の倍数でないならば，aは 4 の倍数でない」は $\boxed{20}$ である。

$\boxed{19}$ には下の⓪～②から，$\boxed{20}$ には下の③～④から適するものを選べ。

⓪ 逆
① 裏
② 対偶
③ 真
④ 偽

(6)　6個の数字0，1，2，3，4，5を用いて3桁の整数をつくるとき，奇数がN通りできるとする。各位に異なる数字を用いる場合は$N=$ $\boxed{21}\boxed{22}$，各位に同じ数字を重複して用いてよい場合は $N=$ $\boxed{23}\boxed{24}$ である。

(7)　2つの整数a，bを6で割ったときの余りはそれぞれ5，3である。このとき，$2a+4b$を6で割った余りは $\boxed{25}$，a^2-10bを6で割った余りは $\boxed{26}$ である。

$\boxed{2}$ 次の(1)〜(4)の問いに答えよ。

(1) $(5x-2)^5$ の展開式における x^3 の係数は $\boxed{27}\boxed{28}\boxed{29}\boxed{30}$ である。

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき

(i) $\sin^2 x \geqq \cos^2 x$ を満たす x の範囲は $-\dfrac{\boxed{31}}{\sqrt{\boxed{32}}} \leqq \cos x \leqq \dfrac{\boxed{31}}{\sqrt{\boxed{32}}}$ であることから,

$$\frac{\boxed{33}}{\boxed{34}}\pi \leqq x \leqq \frac{\boxed{35}}{\boxed{34}}\pi, \quad \frac{\boxed{36}}{\boxed{34}}\pi \leqq x \leqq \frac{\boxed{37}}{\boxed{34}}\pi$$

(ii) $\sin x \geqq \cos x$ を満たす x の範囲は, $\sin x - \cos x \geqq 0$ より

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\boxed{38}}{\boxed{39}}\pi\right) \geqq 0 \qquad \left(0 \leqq \frac{\boxed{38}}{\boxed{39}}\pi < 2\pi\right)$$

すなわち, $\sin\left(x - \dfrac{\boxed{38}}{\boxed{39}}\pi\right) \geqq 0$ であることから

$$\frac{\boxed{40}}{\boxed{41}}\pi \leqq x \leqq \frac{\boxed{42}}{\boxed{41}}\pi$$

(3) 直線 ℓ : $x + 2ay - 3a + 4 = 0$ は定数 a の値に関わらず, 点 $\left(\boxed{43}\boxed{44}, \dfrac{\boxed{45}}{\boxed{46}}\right)$ を通る。

この直線 ℓ と直線 m : $2x + 4y + 1 = 0$ が平行になるのは $a = \boxed{47}$ のときで,

このときの２直線 ℓ, m の距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{48}}}{\boxed{49}\boxed{50}}$ である。

(4) $f(x) = 2^{-x}$, $g(x) = -2^x$ とする。$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の２つのグラフは $\boxed{51}$ に関して対称である。また, 不等式 $4f(x) - g(x) < 5$ を満たす x の範囲は

$\boxed{52} < x < \boxed{53}$ である。$\boxed{51}$ には, 下の⓪〜③から適するものを選べ。

⓪ x 軸

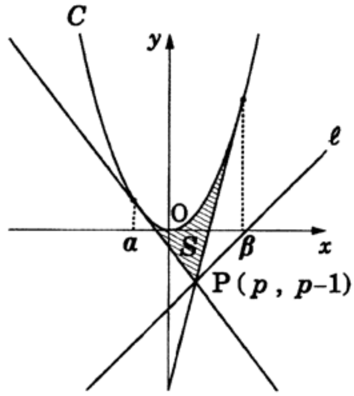
① y 軸

② 原点

③ $y = x$

$\boxed{3}$ 放物線C ： $y=x^2$ と，直線ℓ ： $y=x-1$ を考える。

(1)　放物線C上の点$\left(t\ ,\ t^2\right)$における接線の方程式は　$y=\boxed{54}tx-t^{\boxed{55}}$　である。



(2)　放物線Cに直線ℓ上の点$\mathrm{P}\left(p\ ,\ p-1\right)$から２本の接線が引ける。

このときの接点のx座標をα ，β $\left(\alpha<\beta\right)$ とすれば，

(1)よりα ，βはtの２次方程式　$t^2-\boxed{56}pt+p-\boxed{57}=0$　の解であり，

$\alpha+\beta=\boxed{58}p$ … ①，$\alpha\beta=p-\boxed{59}$ … ② である。

次に，放物線Cと点Pから引いた２本の接線で囲まれた部分の面積をSとする。

(i)　$p=0$のとき，$\alpha=\boxed{60}\boxed{61}$，$\beta=\boxed{62}$　で　$S=\dfrac{\boxed{63}}{\boxed{64}}$　である。

(ii)　一般に　$S=\displaystyle\int_{\alpha}^{p}\left(x-\alpha\right)^2dx+\int_{p}^{\beta}\left(x-\beta\right)^2dx$　である。

さらに，①，②より

$$S=\frac{\left(\beta-\alpha\right)^3}{\boxed{65}\boxed{66}}$$

$\left(\beta-\alpha\right)^2=\boxed{67}p^2-\boxed{68}p+\boxed{69}$ であることから

Sが最小となるのは　$p=\dfrac{\boxed{70}}{\boxed{71}}$　のときで，最小値は　$S=\dfrac{\sqrt{\boxed{72}}}{\boxed{73}}$　である。

$\boxed{4}$ 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3n^3 + 6n^2 + n$ で表される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $a_1 = S_1 = \boxed{74}\boxed{75}$ … ①

$a_2 = S_2 - S_1 = \boxed{76}\boxed{77}$

$a_3 = S_3 - S_2 = \boxed{78}\boxed{79}$

である。

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \boxed{80}n^2 + \boxed{81}n - \boxed{82}$$

この式に，$n=1$ を代入すると $a_1 = \boxed{74}\ \boxed{75}$ となり，①を満たす。

よって，すべての自然数 n について

$$a_n = \boxed{80}\ n^2 + \boxed{81}\ n - \boxed{82}$$

が成り立つ。

(3) $a_n = \left(\boxed{83}n - \boxed{84}\right)\left(\boxed{85}n + \boxed{86}\right)$ であるから，$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ とすると

$$T_n = \frac{\boxed{87}}{\boxed{88}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\boxed{83}\ k - \boxed{84}} - \frac{1}{\boxed{85}\ k + \boxed{86}} \right)$$

したがって，$T_n = \dfrac{n}{\boxed{89}n + \boxed{90}}$ である。