出題のねらい

教科書の内容を、確実に理解していることを求めています。また、問題はいずれも客観式で、数値や符号を解答します。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、ストーリー性をもたせた設問では、設問の読解力も求めています。

1 「数学Ⅰ・A」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「数と式」、「2次関数」、「図形と計量」、「場合の数と確率」、「整数の性質」から出題しました。

2 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「式と証明・複素数と方程式」、「図形と方程式」、「三角関数」、「指数関数と対数関数」から出題しました。

3 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」と「図形と方程式」から出題しました。放物線と円で囲まれた部分の面積を求められるかどうかを問いました。

4 「数学B」の「数列」から出題しました。等差数列の一般項、等比数列の和など、数列の基本的な内容を問いました。

1

【解　答】（40点）

(1)	$\sqrt{\boxed{1}}+\boxed{2}$	$\sqrt{5}+2$	(2点)
	$\boxed{3}$	1	(2点)
	$\boxed{4}\sqrt{\boxed{5}}+\boxed{6}$	$-\sqrt{5}+1$	(3点)
(2)	$\dfrac{\boxed{7}}{\boxed{8}}$	$\dfrac{1}{4}$	(2点)
	$\boxed{9}\pm\sqrt{\boxed{10}-\boxed{11}a}$	$1\pm\sqrt{1-4a}$	(2点)
(3)	$\boxed{12}\leqq y\leqq\boxed{13}$	$0\leqq y\leqq 2$	(2点)
	$\boxed{14}$	8	(3点)
(4)	$\boxed{15}$	7	(2点)
	$\boxed{16}\boxed{17}^\circ$	60°	(2点)
	$\boxed{18}\boxed{19}\sqrt{\boxed{20}}$	$38\sqrt{3}$	(3点)
(5)	$\boxed{21}$	①	(3点)
	$\boxed{22}$	2	(3点)
(6)	$\dfrac{\boxed{23}}{\boxed{24}\boxed{25}}$	$\dfrac{6}{25}$	(3点)
	$\dfrac{\boxed{26}\boxed{27}}{\boxed{28}\boxed{29}\boxed{30}}$	$\dfrac{44}{125}$	(3点)
(7)	$\boxed{31}^{\boxed{32}}\times\boxed{33}^{\boxed{34}}\times\boxed{35}$	$2^4\times3^3\times7$	(2点)
	$\boxed{36}\boxed{37}$	10	(3点)

【解　説】

(1)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\times\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}+2$

$x-2=\sqrt{5}$ とし，両辺を2乗して

$x^2-4x+4=5$

$x^2-4x=1$

また

$$\begin{aligned}x^3-4x^2-2x+3&=x\left(x^2-4x\right)-2x+3\\&=-x+3\\&=-\left(\sqrt{5}+2\right)+3\\&=-\sqrt{5}+1\end{aligned}$$

(2)　$x^2-2x+4a=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\left(-1\right)^2-1\cdot4a>0$$

よって　$a<\dfrac{1}{4}$

このとき

$$\begin{aligned}x&=-\left(-1\right)\pm\sqrt{1-4a}\\&=1\pm\sqrt{1-4a}\end{aligned}$$

(3)　$x=6-3y$ となり，$x\geqq0$ より

$6-3y\geqq0$

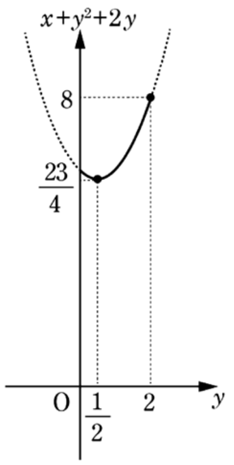
よって　$y\leqq2$

$y\geqq0$ より　$0\leqq y\leqq2$

このとき

$$\begin{aligned}x+y^2+2y&=\left(6-3y\right)+y^2+2y\\&=y^2-y+6\\&=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\end{aligned}$$

$0\leqq y\leqq2$ より，$x=0$，$y=2$ のとき最大値8をとる。



(4)　平行四辺形 AECD において

$\mathrm{AE}=\mathrm{DC}=7$

また　$\mathrm{BE}=12-7=5$

$\triangle\mathrm{ABE}$ において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{ABE}=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{1}{2}$$

このとき，$0^\circ<\angle\mathrm{ABE}<180^\circ$ より

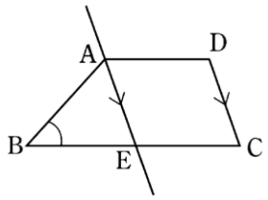
$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ABE}=60^\circ$

したがって，BC を底辺とする台形 ABCD の高さは

$8\times\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$

求める面積は

$$\frac{1}{2}\times(7+12)\times4\sqrt{3}=38\sqrt{3}$$



(5)「$a=0$ かつ $b=0\ \Rightarrow\ ab=0$」は真である。

「$ab=0\ \Rightarrow\ a=0$ かつ $b=0$」は偽である。

反例：$a=0$，$b=1$

したがって

「$a=0$ かつ $b=0$ は，$ab=0$ であるための十分条件であるが必要条件ではない。」（①）

また

「a が素数かつ b が奇数ならば，ab は奇数である」は偽である。

反例：$a=2$，b は任意の奇数

(6)　色が赤，白，赤の順に交互に出る確率は

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{125}$$

色が白，赤，白の順に交互に出る確率は

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{125}$$

よって，色が交互に出る確率は

$$\frac{12}{125}+\frac{18}{125}=\frac{6}{25}$$

赤玉が 2 回出る確率は　${}_3C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$

赤玉が 3 回出る確率は　$\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$

よって，赤玉が 2 回以上出る確率は

$$\frac{36}{125}+\frac{8}{125}=\frac{44}{125}$$

(7)　素因数分解すると

$112=2^4\times7$，$3024=2^4\times3^3\times7$

よって，$n=2^a\times3^3\times7^b$ と表される。

ただし，$a=0,1,2,3,4$，$b=0,1$

a は 5 通り，b は 2 通りあるので，求める自然数 n の個数は

$5\times2=10$（個）

$\boxed{2}$

【解　答】（20 点）

(1)	$(\boxed{38},\boxed{39})$	（3，2）	（1 点）
	$\dfrac{\boxed{40}\boxed{41}}{\sqrt{\boxed{42}\boxed{43}}}$	$\dfrac{12}{\sqrt{13}}$	（2 点）
(2)	$\dfrac{\boxed{44}}{a}$	$\dfrac{1}{a}$	（1 点）
	$\dfrac{\boxed{45}\,ab+a}{ab+\boxed{46}}$	$\dfrac{2\,ab+a}{ab+3}$	（2 点）
(3)	$\boxed{47}\boxed{48}$	-2	（2 点）
	$\dfrac{\boxed{49}\boxed{50}\boxed{51}}{\boxed{52}}$	$\dfrac{-13}{2}$	（1 点）
	$\boxed{53}\boxed{54}$	-6	（1 点）
	$\boxed{55}$	6	（1 点）
	$\dfrac{\boxed{56}\boxed{57}}{\boxed{58}}$	$\dfrac{-9}{2}$	（2 点）

(4)	$\boxed{59}$	4	(2点)
	$\dfrac{\boxed{60}}{\boxed{61}}\pi$	$\dfrac{2}{3}\pi$	(1点)
	$\boxed{62}\sqrt{\boxed{63}}$	$2\sqrt{3}$	(2点)
	$\boxed{64}\,\boxed{65}$	-4	(2点)

【解　説】

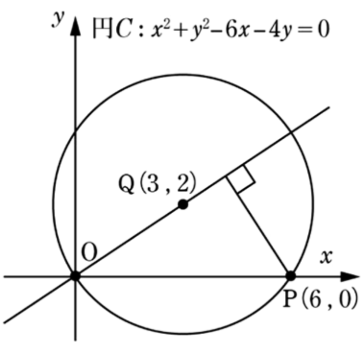
(1)　円C：$(x-3)^2+(y-2)^2=13$ …… ① より，中心の座標は $\mathrm{Q}(3,\ 2)$，　直線 OQ は $y=\dfrac{2}{3}x$

よって，　$2x-3y=0$ …… ②

また，①に $y=0$ を代入して　$x=0,\ 6$

よって，点 $\mathrm{P}(6,\ 0)$ から直線②までの距離は

$$\frac{|2\cdot 6-3\cdot 0|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{12}{\sqrt{13}}$$



直線OQ : $2x-3y=0$

<別解>

円C と直線 OQ の交点のうち，点 O と異なる点を点 A とすると，点 A の座標は$(6,\ 4)$

求める距離を h とすると，△OAP の面積より

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{13}\cdot h$$

よって　$h=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

(2)　$\log_3 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}=\dfrac{1}{a}$

よって

$$\log_{40}75=\frac{\log_3 75}{\log_3 40}=\frac{\log_3(3\times 5^2)}{\log_3(2^3\times 5)}$$

$$=\frac{\log_3 3+\log_3 5^2}{\log_3 2^3+\log_3 5}$$

$$=\frac{1+2b}{3\cdot\dfrac{1}{a}+b}=\frac{2ab+a}{ab+3}$$

(3)　a について整理すると

$$(-x^2-2x)a+x^3+2x^2+9x+18=0$$

a の値に関わらず等号が成り立つとき

$$\begin{cases}-x^2-2x=0\\ x^3+2x^2+9x+18=0\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}x(x+2)=0\\ (x+2)(x^2+9)=0\end{cases}$$

よって　$x=-2$

また，$x^3+(2-a)x^2+(9-2a)x+18=0$ より

$$(x+2)(x^2-ax+9)=0 \text{ …… ①}$$

これが 2 重解をもつとき，次の 2 つの場合がある。

(i)　$x^2-ax+9=0$ が $x=-2$ を解にもち，かつ重解をもたない

(ii)　$x^2-ax+9=0$ が重解をもち，かつそれが $x\neq -2$ である

(i)のとき　$(-2)^2-a(-2)+9=0$

よって　$a=-\dfrac{13}{2}$

このとき　$x^2-\left(-\dfrac{13}{2}\right)x+9=0$

$2x^2+13x+18=0$

$(x+2)(2x+9)=0$

よって，$x=-2\ ,-\dfrac{9}{2}$ となり，重解をもたないから適する。

(ii)のとき　判別式　$D=(-a)^2-36=0$

よって　$a=\pm 6$

このとき　$(x\mp 3)^2=0$

よって，$x=\pm 3$ となり，$x\neq -2$ を満たすから適する。

(i)，(ii)より　$a=-\frac{13}{2}$, -6 , 6

つぎに，$a=-\frac{13}{2}$ のとき①は

$$(x+2)\left\{x^2-\left(-\frac{13}{2}\right)x+9\right\}=0$$

$$(x+2)(2x^2+13x+18)=0$$

$$(x+2)^2(2x+9)=0$$

よって，２重解でない解は　$x=-\frac{9}{2}$

(4)　与式を変形して

$$-2\sin x+2\sqrt{3}\cos x=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}\sin(x+\alpha)$$
$$=4\sin(x+\alpha)$$

とおくと

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

であるから　$\alpha=\frac{2}{3}\pi$

よって　$-2\sin x+2\sqrt{3}\cos x=4\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき　$\frac{2}{3}\pi\leqq x+\frac{2}{3}\pi\leqq\frac{5}{3}\pi$

よって　$-1\leqq\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$-4\leqq 4\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)\leqq 2\sqrt{3}$$

したがって，$-2\sin x+2\sqrt{3}\cos x$ は，最大値 $2\sqrt{3}$ ，最小値 -4 をとる。

$\boxed{3}$

【解　答】（20点）

(1)	$y=\dfrac{\boxed{66}}{\boxed{67}}\alpha x-\dfrac{\boxed{68}}{\boxed{69}}\alpha^2$	$y=\dfrac{4}{3}\alpha x-\dfrac{2}{3}\alpha^2$	（2点）
	$\pm\dfrac{\boxed{70}\sqrt{\boxed{71}}}{\boxed{72}}$	$\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$	（4点）
(2)	$\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{73}}}{\boxed{74}},\dfrac{\boxed{75}}{\boxed{76}}\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$	（3点）
	$\dfrac{\boxed{77}}{\boxed{78}}\pi$	$\dfrac{2}{3}\pi$	（3点）
	$\dfrac{\boxed{79}}{\boxed{80}}\pi$	$\dfrac{1}{3}\pi$	（3点）
	$\dfrac{\sqrt{\boxed{81}}}{\boxed{82}\boxed{83}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$	（5点）

【解　説】

(1)　$y'=\frac{4}{3}x$ より，直線 ℓ の傾きは $\frac{4}{3}\alpha$ であるから，直線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{4}{3}\alpha(x-\alpha)+\frac{2}{3}\alpha^2=\frac{4}{3}\alpha x-\frac{2}{3}\alpha^2$$

すなわち　$4\alpha x-3y-2\alpha^2=0$

ℓ が円 C と接するとき，原点と ℓ の距離が 1 であるから　$\dfrac{|-2\alpha^2|}{\sqrt{(4\alpha)^2+(-3)^2}}=1$

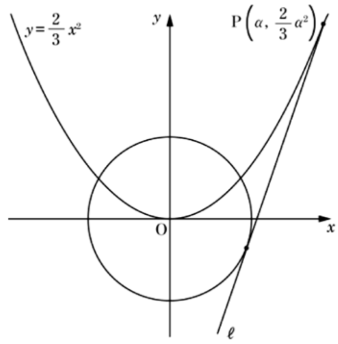
$$2\alpha^2=\sqrt{16\alpha^2+9}$$

両辺を２乗して　$4\alpha^4-16\alpha^2-9=0$

$$(2\alpha^2-9)(2\alpha^2+1)=0$$

$\alpha^2\geqq 0$ より，$\alpha^2=\frac{9}{2}$

よって　$\alpha=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$



(2)　$y=\frac{2}{3}x^2$ より　$x^2=\frac{3}{2}y$

$x^2+y^2=1$ に代入して　$\frac{3}{2}y+y^2=1$

$$2y^2+3y-2=0$$
$$(2y-1)(y+2)=0$$

$y \geqq 0$ より　$y=\frac{1}{2}$

このとき　$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，点 A の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

また　$\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$

よって，扇形 AOB の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi$$

次に，直線 OA の傾きは　$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

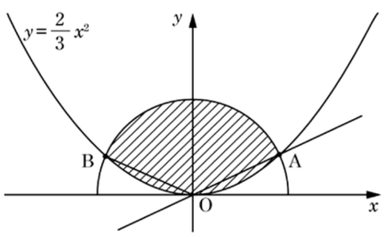
よって，直線 OA の方程式は　$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

これより，放物線 K と直線 OA で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2}{3}x^2\right)dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{24}$$

したがって，放物線 K と C' とで囲まれた図形の面積は

$$\frac{1}{3}\pi+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{24}=\frac{1}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{12}$$



4

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{84}\boxed{85}\boxed{86}n+\boxed{87}\boxed{88}$	$-12n+40$	（4 点）
	$\boxed{89}$	4	（2 点）
	$\boxed{90}$	2	（2 点）
(2)	$\boxed{91}\boxed{92}$	20	（4 点）
	$\boxed{93}\boxed{94}$	12	（4 点）
(3)	$\boxed{95}$	5	（4 点）

【解　説】

(1)　等差数列$\{a_n\}$は初項 28，公差-12より

$$a_n=28+(n-1)\cdot(-12)=-12n+40$$

また，$a_3=-12\cdot 3+40=4$　であるから，

$a_1+a_3=2a_2$　が成り立つ。

(2)　4 つの数 x，16，y，8 が，この順に等差数列となるとき

$$\begin{cases}16+8=2y\\ x+y=2\cdot 16\end{cases}$$

これを解いて　$x=20$，$y=12$

(3)　数列$\{b_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=32-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$$

$b_n+S_{n+4}\leqq 33$　より

$$16\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left\{32-\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+4)-5}\right\}\leqq 33$$

$$15\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqq 1$$

$$15\leqq 2^{n-1}$$

$$30\leqq 2^n$$

これを満たす最小の自然数 n は 5 である。