一般入試／数学（前期）

出題のねらい

教科書の内容を、確実に理解していることを求めています。また、問題はいずれも客観式で、数値や符号を解答します。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、ストーリー性をもたせた設問では、設問の読解力も求めています。

$\boxed{1}$ 「数学I・A」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「数と式」、「2次関数」、「図形と計量」、「場合の数と確率」、「図形の性質」、「整数の性質」から出題しました。

$\boxed{2}$ 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「式と証明・複素数と方程式」、「図形と方程式」、「三角関数」、「指数関数と対数関数」から出題しました。

$\boxed{3}$ 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」から出題しました。関数の極大値・極小値と最大値について、理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{4}$ 「数学B」の「ベクトル」から出題しました。内積計算や分点の位置ベクトルなどのベクトルの基本的事項が理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{1}$

【解　答】（40点）

(1)	$\boxed{1}\boxed{2}$	15	（2点）
	$\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$	$\dfrac{2}{3}$	（2点）
(2)	$\boxed{5}\boxed{6}$	−2	（2点）
	$\boxed{7}-\sqrt{\boxed{8}}$	$1-\sqrt{6}$	（2点）
	$\boxed{9}$	③	（2点）
(3)	$\boxed{10}$，$\boxed{11}$	③，①	（2点）
	$\boxed{12}$，$\boxed{13}$	④，⓪	（2点）
	$\boxed{14}$	⑦	（2点）
(4)	$\dfrac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{16}}$	$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$	（2点）
	$\boxed{17}$	4	（2点）
	$\boxed{18}$	②	（2点）
(5)	$\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20}}$	$\dfrac{5}{7}$	（3点）
	$\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}\boxed{23}}$	$\dfrac{7}{15}$	（3点）
(6)	$\boxed{24}\boxed{25}°$	78°	（3点）
	$\boxed{26}\sqrt{\boxed{27}\boxed{28}}$	$2\sqrt{21}$	（3点）
(7)	$\boxed{29}$，$\boxed{30}$，$\boxed{31}$	5，2，6	（2点）
	$\boxed{32}$	8	（2点）
	$\boxed{33}$	2	（2点）

【解　説】

(1)　$xy=\left(5+\sqrt{10}\right)\left(5-\sqrt{10}\right)=25-10=15$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{\left(5+\sqrt{10}\right)+\left(5-\sqrt{10}\right)}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

(2)　$f(x)=ax^2+4x+10$

$$=a\left(x^2+\frac{4}{a}x\right)+10$$

$$=a\left(x+\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a}+10$$

$y=f(x)$ のグラフの頂点の x 座標が1だから

$$-\frac{2}{a}=1$$

よって　$a=-2$

このとき，$-2x^2+4x+10>0$ より

$$x^2-2x-5<0$$

よって　$1-\sqrt{6}<x<1+\sqrt{6}$

すなわち，$p=1-\sqrt{6}$，$q=1+\sqrt{6}$ で　$p<x<q$　（③）

(3)(i)　命題 P の逆は

「$a>0$ または $b>0$（③）ならば $ab<0$（①）」

……①

命題 P の対偶は

「$a<0$ かつ $b<0$　（④）　ならば $ab>0$（⓪）」

……②

(ii)　対偶②は「真」であるので，命題 P は「真」

また，命題 P の逆①は，反例「$a=b=1$」があることから「偽」である。

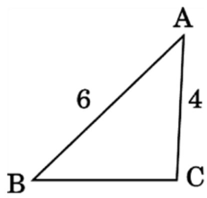
よって，「$ab<0$」であることは「$a>0$ または $b>0$」であるための「十分条件であるが必要条件ではない」（⑦）

(4)　△ABC の面積について

$$\frac{1}{2}\times6\times4\sin A=3\sqrt{7}$$

よって　$\sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より



（面積 $3\sqrt{7}$ ）

$$\cos^2 A=\frac{9}{16}$$

∠A は鋭角なので　$\cos A=\dfrac{3}{4}$

余弦定理により

$$BC^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\frac{3}{4}=16$$

BC>0 より　BC=4

よって，$\cos C=\dfrac{4^2+4^2-6^2}{2\times4\times4}=-\dfrac{1}{8}$ となり，∠C は鈍角（②）

(5)　X が偶数である事象を A とすれば，$\overline{A}$ は X が奇数である事象だから，余事象の確率より

$$P(A)=1-\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{5}{7}$$

X が 4 の倍数である事象を B とすれば，B が起こる場合は取り出した２枚のカードが２枚とも偶数か，$\boxed{4}$ と奇数のカードであるから

$$P(B)=\frac{{}_3C_2+1\times4}{{}_7C_2}=\frac{1}{3}$$

さらに，$A\cap B=B$ であるから，求める条件付き確率は　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{1}{3}\div\dfrac{5}{7}=\dfrac{7}{15}$

(6)(i)　直線 AD (ℓ) は接線であるから

∠CAD=∠ABC

題意より　∠BAC=∠CAD

よって，∠CAD$=x$ とおくと，△ABD において

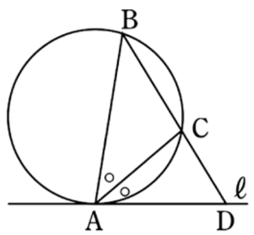
$3x+\angle ADB=180°$

$\angle ADB=63°$ より

$x=39°$

よって

$\angle BAD=2x=78°$



(ii)　AB=8，AD=6 より

BC：CD=8：6=4：3

$BD=y$ とおくと　$CD=\dfrac{3}{7}y$

ここで，方べきの定理 $AD^2=BD\times CD$ より

$$6^2=y\times\frac{3}{7}y$$

$$y^2=84$$

$y>0$ より　$y=2\sqrt{21}$

(7)　$mn+2m-5n-16=0$

$$\{(m-5)(n+2)+10\}-16=0$$

よって　$(m-5)(n+2)=6$

m，n は整数であるから，$m-5$，$n+2$ の組は

$m-5$	−6	−3	−2	−1	1	2	3	6
$n+2$	−1	−2	−3	−6	6	3	2	1

すなわち，整数 m，n の組は

m	−1	2	3	4	6	7	8	11
n	−3	−4	−5	−8	4	1	0	−1

の８組。

そのうち，m，n がともに自然数の組は２組。

$\boxed{2}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{34}\boxed{35}$	−3	（2 点）
	$\boxed{36}\boxed{37}$	−9	（2 点）
(2)	$\boxed{38}$	1	（1 点）
	$\boxed{39}$	6	（1 点）
	$\boxed{40}$	5	（1 点）
	$\boxed{41}x+\boxed{42}\boxed{43}$	$2x+13$	（2 点）
(3)	$\dfrac{\boxed{44}\boxed{45}}{\sqrt{5}}$	$\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$	（2 点）
	$\dfrac{\boxed{46}}{\boxed{47}}$	$\dfrac{4}{5}$	（2 点）
	$\dfrac{\boxed{48}-\sqrt{\boxed{49}}}{2\sqrt{5}}$	$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$	（2 点）
(4)	$\boxed{50}\boxed{51}\boxed{52}$	104	（2 点）
	$\log_2\boxed{53}\boxed{54}$	$\log_2 10$	（3 点）

【解　説】

(1)　$x^3=27$ より　$x^3-27=0$

$$(x-3)(x^2+3x+9)=0$$

２つの虚数解が α，β であるから，α，β は

$x^2+3x+9=0$ の解であり

$\alpha+\beta=-3$　，$\alpha\beta=9$

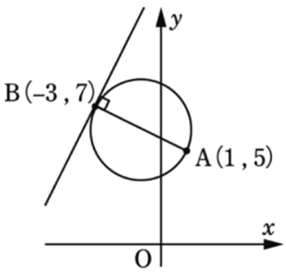
よって

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-3)^2-2\times9\\&=-9\end{aligned}$$

(2)　円の中心は

$$\left(\frac{1+(-3)}{2},\ \frac{5+7}{2}\right)$$

すなわち　$(-1,\ 6)$



円の半径は

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

よって，円の方程式は

$$(x+1)^2+(y-6)^2=5$$

点 $\mathrm{B}(-3,\ 7)$ における円の接線は，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線 AB に垂直だから，傾きは 2 となり

$$y-7=2(x+3)$$

よって　$y=2x+13$

(3)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　より，$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$　であるから　$\sin\theta<0$

よって　$\sin\theta=-\sqrt{\dfrac{4}{5}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

また

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$=\frac{4}{5}$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

(4)(i)　$4^x=X$ とおくと

$$16^x=(4^x)^2=X^2,\ 4^{x+1}=4X$$

よって，①は　$X^2-104X+400=0$　……②

(ii)　②より　$(X-100)(X-4)=0$

よって，$X=100,\ 4$ であるから

$$4^x=100,\ 4$$

大きい方の解は　$4^x=100$　より

$$x=\log_4 100$$
$$=\frac{\log_2 100}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2 100$$
$$=\log_2 100^{\frac{1}{2}}=\log_2 10$$

3

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{55}$，$\boxed{56}$	3，4	（2 点）
	$\dfrac{\boxed{57}}{\boxed{58}\boxed{59}}$	$\dfrac{4}{27}$	（2 点）
	$\boxed{60}$	0	（2 点）
(2)	$\dfrac{\boxed{61}}{\boxed{62}}$	$\dfrac{3}{4}$	（3 点）
	$\boxed{63}$	3	（3 点）
	$\dfrac{\boxed{64}-\sqrt{\boxed{65}}}{\boxed{66}}$	$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$	（4 点）
	$\dfrac{\boxed{67}}{\boxed{68}}$	$\dfrac{3}{2}$	（4 点）

【解　説】

(1)　$f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x$　より

$$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$$
$$=(3x-a)(x-a)$$

$f'(x)=0$ のとき　$x=\dfrac{a}{3},\ a$

$a>0$　であるから，$f(x)$　の増減表は下のようになる。

x	…	$\frac{a}{3}$	…	a	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

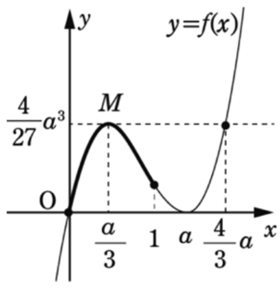
よって，極大値は

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{3}\cdot\left(\frac{a}{3}-a\right)^2=\frac{4}{27}a^3$$

極小値は

$$f(a)=a\cdot(a-a)^2=0$$

(2)(i)



$f(x)=\dfrac{4}{27}a^3$ となる x の値を求めると

$$x^3-2ax^2+a^2x-\frac{4}{27}a^3=0$$

$$27x^3-54ax^2+27a^2x-4a^3=0$$
$$(3x-a)^2(3x-4a)=0$$

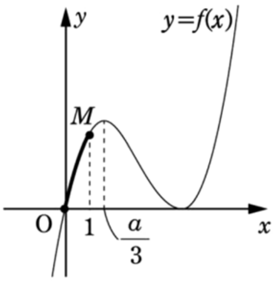
よって　$x=\dfrac{a}{3}$，$\dfrac{4}{3}a$

これより，$M=\dfrac{4}{27}a^3$ となるのは $\dfrac{a}{3}\leqq 1\leqq\dfrac{4}{3}a$ のとき

である。

したがって　$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$

(ii)　(ア)　$1<\dfrac{a}{3}$ のとき



$3<a$ ……①であり，最大値は $f(1)=1-2a+a^2$

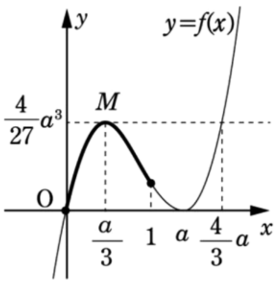
より　$1-2a+a^2=\dfrac{1}{2}$

$$2a^2-4a+1=0$$

よって　$a=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

①より，解なし。

(イ)　$\dfrac{a}{3}\leqq 1\leqq\dfrac{4}{3}a$ のとき



$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ ……②であり，最大値は

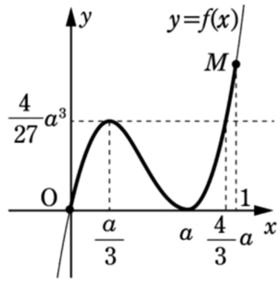
$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{4}{27}a^3$ より　$\dfrac{4}{27}a^3=\dfrac{1}{2}$

$$a^3=\frac{27}{8}$$

よって　$a=\dfrac{3}{2}$

これは②を満たす。

(ウ)　$\dfrac{4}{3}a<1$ のとき



$0<a<\dfrac{3}{4}$ ……③であり，最大値は

$$f(1)=1-2a+a^2$$

より　$1-2a+a^2=\dfrac{1}{2}$

(ア)と同様にして

$$a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

③より　$a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

(ア)～(ウ)より

$$a=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{3}{2}$$

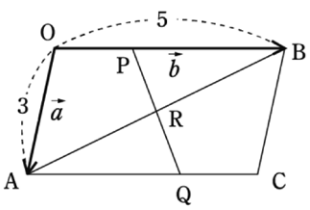
$\boxed{4}$

【解　答】(20点)

(1)	$\boxed{69}\boxed{70}$	-5	(4点)
	$\boxed{71}\boxed{72}\sqrt{\boxed{73}}$	$10\sqrt{2}$	(4点)
(2)	$\dfrac{\boxed{74}}{\boxed{75}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{76}}{\boxed{77}}\vec{b}$	$\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$	(4点)
	$\dfrac{\boxed{78}}{\boxed{79}\boxed{80}}$	$\dfrac{4}{15}$	(4点)
	$\dfrac{\boxed{81}\sqrt{\boxed{82}}}{\boxed{83}}$	$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$	(4点)

【解　説】

(1)



$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=5$，$\mathrm{AB}=2\sqrt{11}$ であるから

$$|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ |\vec{b}-\vec{a}|=2\sqrt{11}$$

$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left(2\sqrt{11}\right)^2$ より　$\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2=44$

$$25-2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=44$$
$$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-10$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$

平行四辺形の面積を S とすると

$$S=2\times\triangle\mathrm{OAB}=2\times\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\right\}$$
$$=\sqrt{9\times25-(-5)^2}=10\sqrt{2}$$

(2)(i)　P は OB を $t:(1-t)$ に内分するので　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{b}$

Q は AC を $(1-t):t$ に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

R が PQ を $k:(1-k)$ に内分するとすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$=(1-k)t\vec{b}+k\left\{\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right\}$$
$$=k\vec{a}+(t+k-2kt)\vec{b}\ \cdots\cdots ①$$

R は直線 AB 上の点なので

$$k+(t+k-2kt)=1$$
$$2k-2kt+t-1=0$$
$$2k(1-t)-(1-t)=0$$
$$(2k-1)(1-t)=0$$

$0<t<1$　より　$k=\dfrac{1}{2}$

よって，①より　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

＜別解＞

P は OB を $t:(1-t)$ に内分し, Q は AC を $(1-t):t$ に内分するので，OB=AC より

PB=AQ

よって，△RBP≡△RAQ となり　BR=AR

すなわち，R は対角線 AB の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left\{\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right\}-t\vec{b}=\vec{a}+(1-2t)\vec{b}$

PQ⊥AB のとき　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$$\left\{\vec{a}+(1-2t)\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$
$$-\left|\vec{a}\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-2t)\left|\vec{b}\right|^2=0$$
$$-9-10t+25(1-2t)=0$$

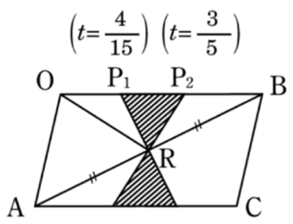
よって　$t=\dfrac{4}{15}$　となり　$t_1=\dfrac{4}{15}$

次に，PQ⊥OC のとき　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$$\left\{\vec{a}+(1-2t)\vec{b}\right\}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$$
$$\left|\vec{a}\right|^2+(2-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-2t)\left|\vec{b}\right|^2=0$$
$$9-5(2-2t)+25(1-2t)=0$$

よって　$t=\dfrac{3}{5}$　となり　$t_2=\dfrac{3}{5}$

$t=t_1$，t_2 のときの点 P の位置をそれぞれ $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ とすると，線分 PQ の通過する部分の面積は下図の斜線部分の面積となる。



S は平行四辺形の面積として

$$2\triangle\mathrm{P_1RP_2}=2\times\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{15}\right)\times\triangle\mathrm{ORB}$$
$$=2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}S\right)=\frac{1}{6}S=\frac{1}{6}\times10\sqrt{2}$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$