出題のねらい

教科書の基本的な内容を、確実に理解しているかを求めています。また、問題はいずれも客観式で、数値や符号を解答するので、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、ストーリー性をもたせた設問では、設問の読解力も求めています。

1 「数学Ⅰ・A」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「数と式」、「2次関数」、「図形と計量」、「場合の数と確率」、「整数の性質」からの出題です。

2 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「式と証明・複素数と方程式」、「図形と方程式」、「三角関数」、「指数関数と対数関数」からの出題です。

3 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」を中心とした問題です。放物線と直線で囲まれた部分の面積の求め方が理解できているかどうかを問いました。

4 「数学B」の「数列」の問題です。等差数列の一般項と漸化式で表された数列の一般項を求められるかどうかを問いました。また、和を求められるかどうかを問いました。

1

【解　答】（40点）

(1)	$\boxed{1}\boxed{2}$	-7	(2点)
	$\boxed{3}\boxed{4} < a < \boxed{5}$	$-5<a<1$	(3点)
(2)	$(\boxed{6}\boxed{7}, \boxed{8}\boxed{9})$	$(-3, -4)$	(2点)
	$\boxed{10}$	6	(3点)
(3)	$\dfrac{\boxed{11}\sqrt{\boxed{12}}}{\boxed{13}}$	$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$	(3点)
	$\boxed{14}\sqrt{\boxed{15}}$	$2\sqrt{3}$	(3点)
(4)	$\boxed{16}$	2	(2点)
	$a \geqq \boxed{17}$	$a \geqq 3$	(3点)
(5)	$\boxed{18}\boxed{19}\boxed{20}$	720	(2点)
	$\boxed{21}\boxed{22}\boxed{23}$	480	(3点)
(6)	$\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}$	$\dfrac{3}{7}$	(3点)
	$\dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}$	$\dfrac{1}{3}$	(3点)
(7)	$\boxed{28}\boxed{29}$	73	(2点)
	$\boxed{30}$	0	(2点)
	$\boxed{31}\boxed{32}$	73	(2点)
	$\boxed{33}\boxed{34}\boxed{35}\boxed{36}$	1460	(2点)

【解　説】

(1)(i)　$x=-1$ を代入して

$$(-1)^2-2a\cdot(-1)=4\cdot(-1)-9$$

よって　$a=-7$

(ii)　$x^2-2(a+2)x+9=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-1\cdot 9<0$$

よって　$-5<a<1$

(2)　$y=(x+3)^2-4$ より，頂点は $(-3, -4)$

C を原点に関して対称移動したグラフの頂点は $(3,\ 4)$ であり，x 軸に関して対称移動したグラフの頂点は $(-3,\ 4)$ である。

したがって，x 軸方向に $3-(-3)=6$ だけ平行移動したグラフと重なる。

(3)　△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot \sin 60^\circ=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

△ABC の面積は△ABD と△ADC の面積の和から

$$\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot \mathrm{AD}\cdot \sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AD}\cdot 3\cdot \sin 30^\circ$$

よって　$\mathrm{AD}=2\sqrt{3}$

(4)　「$-2<x<3 \Rightarrow -4<x<2$」は偽である。

反例：$x=\dfrac{5}{2}$

「$-2<x<3 \Rightarrow -a<x<a$」が真となるとき，

正の数 a の値の範囲は　$a\geqq 3$

(5)　6 人の並び方は　$6! = 720$　通り

そのうち，女子 2 人が隣り合う並び方は

$5!\cdot 2! = 240$ 通り

女子 2 人が隣り合わない並び方は

$720 - 240 = 480$　通り

(6)　7 個の中から 2 個取り出すとき，全事象は　${}_7C_2$ 通り。

2 個とも同じ色である確率は

$$\frac{{}_3C_2 + {}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{3}{7}$$

2 個とも同じ色であるとき，その 2 個が赤玉である条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{{}_3C_2}{{}_7C_2}}{\dfrac{{}_3C_2 + {}_4C_2}{{}_7C_2}} = \frac{1}{3}$$

(7)　$365 = 292\times 1 + 73$，　$292 = 73\times 4 + 0$

よって，365 と 292 の最大公約数は 73

$365 = 5\times 73$，　$292 = 4\times 73$　より

365 と 292 の最小公倍数は

$5\times 4\times 73 = 1460$

$\boxed{2}$

【解　答】(20 点)

(1)	$x^2 - x + \boxed{37} = 0$	$x^2 - x + 1 = 0$	(1 点)
	$\boxed{38}\boxed{39}$	-1	(2 点)
	$\boxed{40}$	0	(2 点)
(2)	$-\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}} \leqq \cos x \leqq \boxed{43}$	$-\dfrac{1}{2} \leqq \cos x \leqq 1$	(2 点)
	$-\dfrac{\boxed{44}}{\boxed{45}}$	$-\dfrac{9}{8}$	(3 点)
(3)	$\left(\boxed{46}, \boxed{47}\right)$	$(4,\ 3)$	(1 点)
	$\boxed{48}\boxed{49}$	-1	(1 点)
	$x - \boxed{50}$	$x - 1$	(1 点)
	$\left(\dfrac{\boxed{51}}{\boxed{52}}, \dfrac{\boxed{53}}{\boxed{54}}\right)$	$\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$	(2 点)
(4)	$\boxed{55}$	8	(1 点)
	$\boxed{56}$	9	(1 点)
	$\boxed{57}^{\frac{1}{\boxed{57}}}$	$5^{\frac{1}{5}}$	(3 点)

【解　説】

(1)　$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$　より　$2\alpha - 1 = \sqrt{3}\,i$

両辺を 2 乗して　$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

x^2 の係数が 1 である 2 次方程式は

$x^2 - x + 1 = 0$

また，$\alpha^2 = \alpha - 1$ より

$\alpha^3 = \alpha(\alpha - 1) = \alpha^2 - \alpha = (\alpha - 1) - \alpha = -1$

次に，$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$　より

$\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2\left(\alpha^2 - \alpha + 1\right) = 0$

(2)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$　より　$-\dfrac{1}{2} \leqq \cos x \leqq 1$　……　①

$$\cos 2x + \cos x = \left(2\cos^2 x - 1\right) + \cos x$$

$$= 2\left(\cos x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

①より　$\cos x = -\dfrac{1}{4}$　のとき，最小値　$-\dfrac{9}{8}$

(3)　線分 AB の中点は $\left(\dfrac{2+6}{2},\ \dfrac{5+1}{2}\right)=(4,3)$

直線 AB の傾きは $\dfrac{1-5}{6-2}=-1$

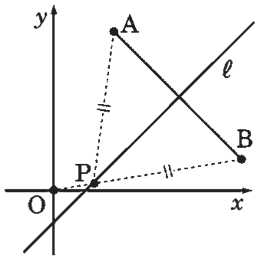
直線 ℓ は点(4, 3)を通り，傾き 1 の直線なので

$y=(x-4)+3=x-1$

OP＋AP を最小にする P は，2 点 O，A が直線 ℓ に関して同じ側にあるので，

直線 OB：$y=\dfrac{1}{6}x$ と

ℓ の交点になる。



$$\begin{cases} y=x-1 \\ y=\dfrac{1}{6}x \end{cases}$$

よって　$x=\dfrac{6}{5}$，$y=\dfrac{1}{5}$　より　P$\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

(4)　(i)　$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$，$\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$

(ii)　(i)より　$2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$ …… ①

また，$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=2^5=32$，$\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}=5^2=25$より

$5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}$ …… ②

①，②より，$2^{\frac{1}{2}}$ と $3^{\frac{1}{3}}$ と $5^{\frac{1}{5}}$ のうち，

最も小さい数は　$5^{\frac{1}{5}}$

$\boxed{3}$

【解　答】（20 点）

(1)	$y=\boxed{58}\,x-\boxed{59}$	$y=6x-9$	(3 点)
	$\boxed{60}$	9	(3 点)
(2)	$-\dfrac{1}{\boxed{61}\,a}$	$-\dfrac{1}{2a}$	(2 点)
	$y=-\dfrac{1}{\boxed{61}\,a}x+a^2+\dfrac{\boxed{62}}{\boxed{63}}$	$y=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$	(3 点)
	$-a-\dfrac{1}{\boxed{64}\,a}$	$-a-\dfrac{1}{2a}$	(3 点)
	$\dfrac{1}{\boxed{65}}\left(\boxed{66}\,a+\dfrac{1}{\boxed{67}\,a}\right)^{\boxed{68}}$	$\dfrac{1}{6}\left(2a+\dfrac{1}{2a}\right)^3$	(4 点)
	$\dfrac{\boxed{69}}{\boxed{70}}$	$\dfrac{1}{2}$	(2 点)

【解　説】

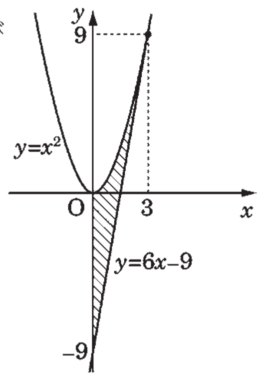
(1)　$y=x^2$　より　$y'=2x$

$a=3$ から，放物線上の点 A(3, 9)における接線の方程式は

$y=2\cdot 3(x-3)+9$

$=6x-9$

この接線と放物線，および y 軸で囲まれた部分の面積は



$\displaystyle\int_0^3\left\{x^2-(6x-9)\right\}dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3$

$=9$

(2)　直線 ℓ の傾きは $2a$ であり，

直線 ℓ と直交する直線 m の傾きは　$-\dfrac{1}{2a}$

直線 m は点 A(a，a^2)を通るので，m の方程式は

$$y=-\frac{1}{2a}\left(x-a\right)+a^2$$

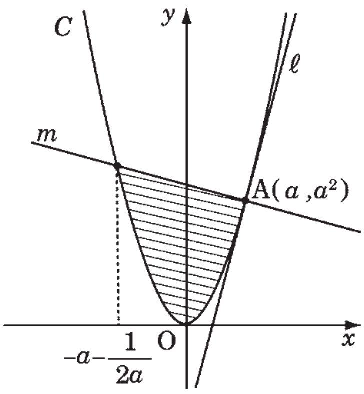
$$=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

放物線 C と m の交点の x 座標は

$$x^2=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

これを解いて　$x=a\,,\,-a-\dfrac{1}{2a}$

A と異なる点の x 座標は　$x=-a-\dfrac{1}{2a}$



よって，放物線と m で囲まれた部分の面積は

$$S=\int_{-a-\frac{1}{2a}}^{a}\left\{\left(-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}\right)-x^2\right\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^3$$

$a>0$ から，$2a>0$ かつ $\dfrac{1}{2a}>0$

相加平均と相乗平均の関係から　$2a+\dfrac{1}{2a}\geqq 2$

よって　$S\geqq\dfrac{4}{3}$

また，等号が成り立つのは　$2a=\dfrac{1}{2a}$ より　$a=\pm\dfrac{1}{2}$

$a>0$ より　$a=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{71}\boxed{72}$	83	(2 点)
	$\boxed{73}\boxed{74}n+\boxed{75}\boxed{76}$	$-3n+86$	(3 点)
(2)	$\boxed{77}$	5	(2 点)
	$\boxed{78}\boxed{79}$	11	(2 点)
	$\boxed{80}^{n-\boxed{81}}$	3^{n-1}	(4 点)
(3)	$\boxed{82}$	3	(2 点)
	$\boxed{83}$	4	(2 点)
	$\boxed{84}\boxed{85}\boxed{86}$	128	(3 点)

【解　説】

(1)　数列 $\left\{a_n\right\}$ の初項を a とすると，$a_7=65$ より

$$a+\left(7-1\right)\cdot\left(-3\right)=65$$

よって　$a=83$

このとき

$$a_n=83+\left(n-1\right)\cdot\left(-3\right)=-3n+86$$

(2)　$b_1=3$，$b_{n+1}=3b_n-4$ より

$n=1$ を代入して　$b_2=3b_1-4=3\cdot3-4=5$

$n=2$ を代入して　$b_3=3b_2-4=11$

次に，$b_{n+1}=3b_n-4$ から

$$b_{n+1}-2=3\left(b_n-2\right)$$

$$b_n-2=\left(b_1-2\right)\cdot3^{n-1}$$

$b_1=3$ より　$b_n-2=3^{n-1}$

(3)　数列$\{a_n\}$は公差が負である等差数列なので

$$a_n \leqq 83$$

数列$\{b_n\}$は　$b_n = 3^{n-1}+2$　で定められる数列なので

$$b_n \geqq 3$$

よって，数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$の共通な項は，3 以上，

83 以下なので

$$3 \leqq b_n \leqq 83$$

$$3 \leqq 3^{n-1}+2 \leqq 83$$

よって　$1 \leqq n \leqq 5$

これより，$b_1 = 3$，$b_2 = 5$，$b_3 = 11$，$b_4 = 29$，$b_5 = 83$

であり，これら 5 つの項と共通な数列$\{a_n\}$の項は

$$a_1 = 83,\quad a_{19} = 29,\quad a_{25} = 11,\quad a_{27} = 5$$

である。

ゆえに，数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$に共通する項は 4 個で

あり，このとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} c_k &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ &= 5 + 11 + 29 + 83 \\ &= 128\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} c_k &= \sum_{k=2}^{5} b_k \\ &= \sum_{k=2}^{5}\left(3^{k-1}+2\right) \\ &= \left\{\frac{1\cdot\left(3^5-1\right)}{3-1} + 2\cdot 5\right\} - \left(3^0+2\right) \\ &= 128\end{aligned}$$