一般入試／数学（前期）

出題のねらい

教科書の基本的な内容を、確実に理解しているかを求めています。また、問題はいずれも客観式で、数値や符号を解答するので、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力も求めています。加えて、ストーリー性をもたせた設問では、設問の読解力も求めています。

$\boxed{1}$ 「数学I・A」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「数と式」、「2次関数」、「図形と計量」、「場合の数と確率」、「整数の性質」、「図形の性質」からの出題です。

$\boxed{2}$ 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。分野は、「式と証明・複素数と方程式」、「図形と方程式」、「三角関数」、「指数関数と対数関数」からの出題です。

$\boxed{3}$ 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」を中心とした問題です。極大・極小など基本事項が理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{4}$ 「数学B」の「ベクトル」の問題です。内積計算や分点の位置ベクトルなどのベクトルの基本的事項が理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{1}$

【解　答】(40点)

(1)	$\boxed{1}\sqrt{\boxed{2}\boxed{3}}$	$2\sqrt{33}$	(3点)
(2)	$\boxed{4}\boxed{5}$	-1	(3点)
(3)	$\boxed{6}$	③	(3点)
	$\boxed{7}$	②	(3点)
(4)	$\boxed{8}\boxed{9}^\circ$	90°	(3点)
	$\boxed{10}$	4	(3点)
(5)	$\boxed{11}\boxed{12}$	56	(3点)
	$\boxed{13}\boxed{14}$	26	(3点)
(6)	$\boxed{15}\boxed{16}$	27	(3点)
	$\dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}}$	$\dfrac{2}{3}$	(3点)
(7)	$\boxed{19}$	6	(3点)
	$\boxed{20}\boxed{21}\boxed{22}\boxed{23}$	2520	(4点)
(8)	$\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}$	$\dfrac{5}{4}$	(3点)

【解　説】

(1)

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}-\sqrt{14}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}+\sqrt{14}\right)$$
$$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{14}\right)^2$$
$$=3+2\sqrt{33}+11-14$$
$$=2\sqrt{33}$$

(2)　2次方程式 $-x^2+ax-(a+3)=0$　において

$$D=a^2-4\cdot(-1)\{-(a+3)\}=a^2-4a-12$$
$$=(a-6)(a+2)$$

2次関数 $y=-x^2+ax-(a+3)$ のグラフが x 軸と共有点をもたない条件は

$D<0$

よって　$-2<a<6$

a は負の整数なので a の値は -1 。

(3)(i)　「x, y はともに偶数」⇒「$x+y$ が偶数」は真である。

「$x+y$ が偶数」⇒「x, y はともに偶数」は偽である。

(反例：$x=1$, $y=3$ は $x+y=4$ で偶数だが, x, y はともに奇数である。) よって十分条件であるが, 必要条件ではないので③。

(ii)　「x, y の少なくとも一方が奇数」⇒「$x+y$ が奇数」の対偶を考えると

「$x+y$ が偶数」⇒「x, y はともに偶数」である。

これは偽である。対偶と元の命題の真偽は一致するので, 元の命題も偽である。

「$x+y$ が奇数」⇒「x, y の少なくとも一方が奇数」の対偶を考えると

「x, y はともに偶数」⇒「$x+y$ が偶数」である。

これは真である。対偶と元の命題の真偽は一致するので, 元の命題も真である。よって必要条件であるが, 十分条件ではないので②。

(4)　△ABC において正弦定理より

$$\frac{8}{\sin B}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

これを解くと

$\sin B=1$

よって　$\angle B=90^\circ$

AC はこの外接円の直径なので半径は

$8\div 2=4$

(5)　A から B まで最短距離で行く道順は

$$\frac{8!}{5!\,3!}=56 \text{（通り）}$$

また，C を通って，A から B まで最短距離で行く道順は

$$\frac{5!}{3!\,2!}\times\frac{3!}{2!}=30 \text{（通り）}$$

よって，C を通らずに A から B まで最短距離で行く道順は

$$56-30=26 \text{（通り）}$$

(6)　3人でじゃんけんをするときに，手の出し方は

$$3^3=27 \text{（通り）}$$

勝ち負けが決まるのは①1 人が勝つ場合と②2人が勝つ場合があり，①1人が勝つ確率は勝つ人の選び方が3通りと，グー，チョキ，パーの3通りがあるので

$$\frac{3\times3}{27}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

②2人が勝つ確率は，1人が負ける確率と等しいので①と同様に

$$\frac{1}{3}$$

①と②は互いに排反な事象なので

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(7)　$30=2\cdot3\cdot5$

$72=2^3\cdot3^2$

$126=2\cdot3^2\cdot7$

より，最大公約数は $2\cdot3=6$

最小公倍数は $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7=2520$

(8)　方べきの定理より

$$4(4+x)=3(3+4)$$

これを解くと

$$x=\frac{5}{4}$$

2

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{26}\boxed{27}$	19	(2 点)
	$\boxed{28}\boxed{29}\boxed{30}$	-30	(2 点)
(2)	$\boxed{31}\boxed{32}$	25	(2 点)
	$\boxed{33}\boxed{34}$	20	(2 点)
(3)	$-\frac{\sqrt{\boxed{35}}}{\boxed{36}}\leqq\cos\theta\leqq\boxed{37}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq1$	(2 点)
	$\boxed{38}$	0	(2 点)
	$\frac{\boxed{39}}{\boxed{40}}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	(2 点)
	$-\frac{\boxed{41}}{\boxed{42}}$	$-\frac{1}{2}$	(2 点)
(4)	$\boxed{43}$	3	(2 点)
	$\boxed{44}$ ，$\frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$	3，$\frac{1}{3}$	(2 点)

【解　説】

(1)　$P(x)=x^3-ax+b$ とおくと，これが

$x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$ で割りきれるので

$P(-3)=0$，$P(5)=0$ が成り立つ。

$$P(-3)=(-3)^3-a(-3)+b$$
$$=-27+3a+b$$

$$P(5)=5^3-5a+b$$
$$=125-5a+b$$

よって　$-27+3a+b=0$，$125-5a+b=0$

これらを解くと　$a=19$，$b=-30$

(2)　(i)　直線 ℓ : $2x+y=10$ と x 軸との交点 A の x 座標は

$2x+0=10$

$x=5$

よって，点 A の座標は（5，0）

よって原点を中心として点 A を通る円の半径は 5 になり，その方程式は

$$x^2+y^2=25$$

(ii)　直線 ℓ の方程式を変形すると，$2x+y-10=0$
原点を中心として直線 ℓ に接する円の半径は原点と直線 ℓ との距離に等しい。その距離を d とすると

$$d=\frac{|2\cdot0+0-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

原点を中心として直線 ℓ に接する円の方程式は

$$x^2+y^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$$

$$x^2+y^2=20$$

(3)　(i)　$0\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$ より $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq1$ である。

(ii)　$\cos^2\theta+\sqrt{2}\cos\theta=\left(\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$ ……①

と変形できるので，$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq1$ の範囲で①は

$\cos\theta=1$ すなわち $\theta=0$ のとき最大，

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，すなわち $\theta=\frac{3}{4}\pi$ のとき最小であり，最小値は $-\frac{1}{2}$

(4)　(i)　真数条件から

$$3x-5>0$$
$$x>\frac{5}{3}\quad\cdots\cdots①$$

$\log_2(3x-5)=2$ より

$$3x-5=4$$
$$x=3$$

これは①を満たす。
よって，$x=3$

(ii)　真数条件から

$$(3x-5)^2>0$$
$$x\neq\frac{5}{3}\quad\cdots\cdots②$$

$\log_2(3x-5)^2=4$ より

$$(3x-5)^2=2^4$$
$$(3x-9)(3x-1)=0$$
$$x=3,\ \frac{1}{3}$$

これらは②を満たす。

よって，$x=3,\ \frac{1}{3}$

3

【解　答】（20点）

(1)	$\boxed{47}$	0	（2点）
	$\left(x-\boxed{48}\right)\left(x-\boxed{49}\right)^2$	$(x-1)(x-4)^2$	（3点）
	$\boxed{50}<x<\boxed{51}$ ，$\boxed{52}<x$	$1<x<4$ ，$4<x$	（3点）
(2)	$\boxed{53}x^2-\boxed{54}\boxed{55}x+\boxed{56}\boxed{57}$	$3x^2-18x+24$	（3点）
	$x=\boxed{58}$ で 極大値 $\boxed{59}$	$x=2$ で極大値 4	（3点）
	$x=\boxed{60}$ で 極小値 $\boxed{61}$	$x=4$ で極小値 0	（3点）
(3)	$\boxed{62}\leqq a\leqq\boxed{63}$	$2\leqq a\leqq5$	（3点）

【解　説】

(1)　$f(x)=x^3-9x^2+24x-16$ より

$$f(1)=1^3-9\cdot1^2+24\cdot1-16=0$$

よって，$f(x)=x^3-9x^2+24x-16$ は $(x-1)$ で割りきれ，$f(x)=(x-1)(x-4)^2$ と変形できる。
$f(x)=0$ を解くと $x=1$，4 であるので，
不等式 $f(x)>0$ を満たす x の範囲は

$$1<x<4,\quad 4<x$$

(2)　$f(x)=x^3-9x^2+24x-16$ より

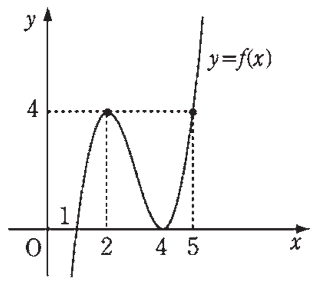
$$f'(x)=3x^2-18x+24$$
$$=3(x-2)(x-4)$$

となり，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	2	…	4	…
$f'(x)$	＋	0	−	0	＋
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

よって $f(x)$ は $x=2$ で極大値 4，
$x=4$ で極小値 0 をとる。

(3)　$x^3-9x^2+24x-16=4$ を解くと，
$(x-2)^2(x-5)=0$ より，
　$x=2$，5
よって，$x\leqq a$ における関数 $f(x)$ の最大値が 4 になるような定数 a の値の範囲は
$2\leqq a\leqq5$ である。



4

【解　答】（20 点）

(1)	$\dfrac{\boxed{64}}{\boxed{65}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{66}}{\boxed{67}}\vec{b}$	$\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$	(4 点)
	$\boxed{68}$	0	(4 点)
(2)	$\dfrac{\boxed{69}}{\boxed{70}}$	$\dfrac{2}{3}$	(4 点)
	$\dfrac{\boxed{71}}{\boxed{72}\boxed{73}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{74}}{\boxed{75}\boxed{76}}\vec{b}$	$\dfrac{6}{13}\vec{a}+\dfrac{4}{13}\vec{b}$	(4 点)
	$\boxed{77}\sqrt{\boxed{78}\boxed{79}}$	$2\sqrt{13}$	(4 点)

【解　説】

(1)　点 C は辺 AB を 2 : 3 に内分する点なので

$$\overrightarrow{OC}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

また，△OAB は直角二等辺三角形なので

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}&=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\\&=k\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\\&=k\vec{a}-\vec{b}\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ より

$$\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)\cdot(k\vec{a}-\vec{b})=0$$

$$\frac{3k}{5}|\vec{a}|^2-\frac{3}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2k}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{5}|\vec{b}|^2=0$$

$$3k|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+2k\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より

$$(3k-2)|\vec{a}|^2=0$$

$|\vec{a}|\neq 0$ より

$$k=\frac{2}{3}$$

また，$BP:PD=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2s}{3}\vec{a}+(1-s)\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

また点 P は線分 OC 上にあるので，ある実数 t を用いて

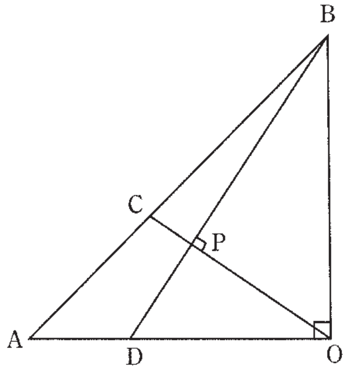
$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}=\frac{3t}{5}\vec{a}+\frac{2t}{5}\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でなく，$\vec{0}$ でないので，①，②より

$$\frac{2s}{3}=\frac{3t}{5}\quad\cdots\cdots③$$

$$1-s=\frac{2t}{5}\quad\cdots\cdots④$$

が成り立つ。



③，④より

$$s=\frac{9}{13},\quad t=\frac{10}{13}$$

①に代入すると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{4}{13}\vec{b}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2&=\left|\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{4}{13}\vec{b}\right|^2\\&=\left(\frac{6}{13}\right)^2|\vec{a}|^2+2\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{4}{13}\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\frac{4}{13}\right)^2|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=13$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2&=\left(\frac{6}{13}\right)^2\cdot13^2+\left(\frac{4}{13}\right)^2\cdot13^2\\&=36+16\\&=52\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{OP}|>0$ より

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$